Analyysi I
Harjoitus 7/2002

1. Oletetaan, että funktiolle f pätee $|f(x)| \leq |x|$ kaikilla $x \in]-1, 1[$. Osoita raja-arvon määritelmän avulla, että f on jatkuva pisteessä 0.

2. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja g epäjatkuva pisteessä x_0. Osoita, että

(a) $f + g$ on epäjatkuva pisteessä x_0,

(b) fg on epäjatkuva pisteessä x_0, jos $f(x_0) \neq 0$.

(Vihje! Tee antiteesi ja hyödynnä Lausetta 2.4.5).

3. Olkoon $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ jatkuva ja aidosti vähenevä siten, että $f(0) = 2$ ja $f(1) = 0$. Osoita, että f on bijektio joukosta $[0, 1]$ joukkoon $[0, 2]$.

4. Olkoot $f(x) = x^2 + 1$ ja $g(x) = x^3 + 1$. Määrää $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$.

5. Perustele, miksi yhtälöllä

$$x^{13} + x + 1 = 0$$

on ainakin yksi reaalinen ratkaisu.

6. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f(x) = ax + b,$$

missä $a, b \in \mathbf{R}$ ovat vakioita, $a \neq 0$. Määrää käänteisfunktion f^{-1} lauseke ja hahmottele funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat (x, y)-koordinaatistoon tapauksessa $a = 2$, $b = -3$. Minkä suoran suhteen kuvaajat ovat symmetrisiä?