

Analyysi I

Harjoitus 2/2004

1. Olkoon $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 3$ ja $Q(x) = x^2 + 1$. Etsi jakokulmassa jakamalla jakoyhtälön esitys

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x),$$

missä $\deg R \leq 1$.

2. Etsi polynomi P siten, että

$$x^6 - 1 = P(x)(x - 1)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3. Todista polynomien jakoyhtälön yksikäsitteisyysväite seuraavalla logiikalla: Olkoot P ja Q polynomeja siten, että $\deg Q \neq 0$. Oletetaan, että polynomit A_1, A_2, R_1, R_2 toteuttavat ehdot

$$P(x) = A_i(x)Q(x) + R_i(x) \quad \text{ja} \quad \deg R_i < \deg Q, \quad i = 1, 2,$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että $A_1(x) = A_2(x)$ ja $R_1(x) = R_2(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

4. Oletetaan, että mn on parillinen, $m, n \in \mathbf{Z}$. Osoita epäsuoraa todistusta käyttäen, että ainakin toinen luvuista m ja n on parillinen.
5. Osoita epäsuoralla todistuksella klassinen tulos $x^2 \neq 2$ kaikilla $x \in \mathbf{Q}$. (Huom! Etsi todistus kirjallisuudesta ja tee se itsellesi selväksi.)
6. Osoita, että yleinen kolmannen asteen yhtälö

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

saadaan sijoituksella $x = y - \frac{a}{3}$ muotoon

$$y^3 + py + q = 0.$$

Ilmaise p ja q parametrien a, b, c funktiona.

7. Etsi rationaalifunktion

$$R(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

osamurtokehitelmä.

8. Etsi rationaalifunktion

$$R(x) = \frac{1}{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}$$

osamurtokehitelmä.