Analyysi I
Harjoitus 3/2004

1. Etsi rationaalifunktion

$$R(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)^2}$$

osamurtokehitelmä.

2. Olkoon $(F, +, \cdot, <)$ järjestetty kunta ja olkoot $x, y, z, w \in F$. Osoita vain aksiomeja (A1)–(A9) ja (B1)–(B4) käyttäen:

(a) Jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $x = y$,

(b) Jos $x < y$ ja $z < w$, niin $x + z < y + w$.

3. Olkoon $(F, +, \cdot, <)$ järjestetty kunta ja olkoot $x, y, z \in F$. Osoita vain aksiomeja (A1)–(A9) ja (B1)–(B4) sekä Lauseen 1.4.5 kohtia (a)–(i) käyttäen:

(a) Jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $xz < yz$,

(b) Jos $x < y$ ja $z < 0$, niin $xz > yz$.

4. Olkoon $(F, +, \cdot, <)$ järjestetty kunta. Osoita, että

$$0 < 1.$$

(Huom! Voit hyödyntää todistuksessa vapaasti aksiomeja (A1)–(A9) ja (B1)–(B4) sekä Lauseen 1.4.5 kohtia (a)–(t)).

5. Olkoon $A =]0, 1[\cup]2, 3[\cup \{4\}$ ja $B = \{ \frac{1-n}{2-n} \mid n = 3, 4, \ldots \}$. Määrää $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ ja $\inf B$. Väitteitä ei tarvitse todistaa, vastaus ja intuitiivinen perustelu riittää.

6. Osoita, että luku 2 on joukon $A = \{ x^{-1} + x \mid x > 1 \}$ alaraja.

7. Osoita, että jos $a > 2$, niin a ei ole joukon $A = \{ x^{-1} + x \mid x > 1 \}$ alaraja.

8. Minkä väitteen todistuksen saat yhdistämällä tehtävät 6 ja 7?

Vihje! Tehtävissä 2-4 voit kuvitella tarkastelevasi reaalilukuja. Tarkistat vain lopuksi, että olet hyödyntänyt sallittuja tuloksia.