

Analyysi I
Harjoitus 4/2004

1. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

2. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

3. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2}.$$

4. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{6n^3 + 2n + 3}.$$

5. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 3n^2}{6n^5 - 4n^4 + 3}.$$

6. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että jos lukujono $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suppenee, niin lukujono $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on rajoitettu.

7. Todista raja-arvon määritelmää käyttäen seuraava kuristusperiaate II: Oletetaan, että jonoille $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ja $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ pätee

(a) On olemassa $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $0 \leq |y_n| \leq |x_n|$ kaikilla $n \geq n_0$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Tällöin $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

8. Olkoon jono $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ rajoitettu. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^3} = 0.$$

(Vihje! Kuristusperiaate.)