Analyysi I
Harjoitus 5/2004

1. Osoita, että jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+n},$$

on kasvava.

2. Tarkastellaan jonoa $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, missä $x_1 = 1$ ja

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Osoita, että jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on vähenevä ja rajoitettu.

3. Määrää Tehtävän 2 jonon raja-arvo. (Vihje! Merkitse $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ja ota raja-arvot puolittain yhtälössä $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$. Miksi raja-arvo on olemassa?)

4. Olkoon $0 \le x < 1$. Määrää

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^n}{3+x^{2n}}.$$

5. Osoita Lauseen 2.2.16 avulla, että jonolla $x_n = \cos n$ ei ole raja-arvoa.

6. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f(x) = ax + b,$$

missä $a, b \in \mathbf{R}$ ovat vakioita, $a \neq 0$. Osoita, että f on injektio.

7. Osoita, että kuvaus $f : \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{4}\} \to \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$,

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+5},$$

on surjektio.

8. Olkoot $A \subset \mathbf{R}$ ja $B \subset \mathbf{R}$ sekä olkoon $f : A \to B$ aidosti vähenevä. Osoita, että f on injektio.