Analyysi I
Harjoitus 9/2004

1. Määrää $a \in \mathbf{R}$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \leq a \\ 1-x^2, & \text{kun } x > a \end{cases}$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}$.

2. Oletetaan, että funktiolle f pätee

$$|f(x)| \leq 3|x|$$

kaikilla $x \in]-1,1[$. Osoita, että f on jatkuva pisteessä 0.

3. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 siten, että $f(x_0) \neq 0$ ja olkoon g epäjatkuva pisteessä x_0. Osoita, että kuvaus

$$h(x) := \frac{g(x)}{f(x)}$$

on epäjatkuva pisteessä x_0.

4. Perustele, miksi yhtälöllä

$$x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = 0$$

on ainakin kaksi ratkaisua välillä $]-2,2[$.

5. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva ja olkoot $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Osoita, että on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

6. Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$. Määrää $f'(x)$ derivaatan määritelmää käyttäen pisteessä $x > 0$.

7. Olkoon $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$ ja asetetaan $f(0) = 0$. Tutki derivaatan määritelmän avulla, onko f derivoituva origossa.

8. Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä x. Osoita derivaatan määritelmää käyttäen, että

(i) $D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$,

(ii) $D(af(x)) = aD(x)$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$.