

**Analyysi I**  
**Harjoitus 10/2004**

1. Olkoon  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Derivoi funktiot  $f \circ f$  ja  $f \circ f \circ f$ .

2. Mitä voit sanoa Rollen Lauseen ja Bolzanon lauseen avulla algebrallisen yhtälön

$$f(x) = -x^{16} - x^8 + 3x = 0$$

nollakohtien lukumäärästä?

3. Olkoot  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ . Määää luku  $c$ , kun väliarvolauseetta sovelletaan välillä  $[a, b]$  funktioon  $f(x) = x^2$ . Mitä erikoista havaitset?

4. Oletetaan, että

(i)  $f$  on jatkuva välillä  $[a, b]$ ,

(ii)  $f$  on derivoituva välillä  $]a, b[$ ,

(iii)  $f'(x) = 0$  kaikilla  $x \in ]a, b[$ .

Osoita, että  $f$  on vakiofunktio välillä  $[a, b]$ .

5. Arvioi väliarvolauseen avulla virhettä, joka tehdään kun lukua

$$\frac{(\pi - 1)^2}{(\pi - 3)^2}$$

arvioidaan lausekkeella  $\frac{(3.14-1)^2}{(3.14-3)^2}$  ja tiedetään, että  $3.14 < \pi < 3.15$ .

6. Olkoon  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbf{R}$  jatkuva ja oletetaan, että  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = a \in \mathbf{R}$ . Osoita, että  $f'_+(x_0) = a$ . (Vihje! Tarkastele erotusosamäärän toispuoleista raja-arvoa väliarvolauseen avulla. Vastaava tulos pätee myös oikeanpuoleiselle derivaatalle ja varsinaiselle derivaatalle.)

7. Määää raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{103} - 1}{4x^3 - x - 3}$$

8. Määää raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^4}{3x^2}$$

(Vihje! Sinin ja kosinin derivoimissäännöt sekä käyttäytyminen origossa pidetään tässä tunnettuna.)

9. Kurssipalaute.

10. Kurssipalaute.