Analyysi I
Harjoitus 11/2004

1. Todista Lauseen 4.3.1 kohta (ii): Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva ja oletetaan, että $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]a,b[$. Osoita, että f on aidosti vähenevä välillä $[a,b]$.

2. Todista Lauseen 4.3.4 kohta (ii): Olkoon $f : B(x_0,r) \to \mathbf{R}$ jatkuva ja oletetaan, että f on derivoituva punkteeratussa ympäristössä $B'(x_0,r)$ siten, että $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0[$ ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]x_0, x_0 + r[$. Osoita, että funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali minimi.

3. Määrää lokaalit ääriarvopisteet funktiolle

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}.$$

4. Tutki, onko Tehtävän 3 funktiolla f pienintä/suurinta arvoa joukossa $\mathbf{R}$?

5. Määrää pisteen $(1,3)$ etäisyys suorasta $y = 2x - 1$.

6. Osoita derivaatan avulla, että yhtälöllä $x^4 - x + 2 = 0$ ei ole ratkaisuja.

7. Tutki, milloin funktio

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

on konveksi.

8. Määrää raja-arvot

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6 + x^4}{x^7 + 2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{-3x^3 - 2x + 3}$.