Analyysi I

Visa Latvala

18. marraskuuta 2004

Sisältö

4 Derivaatta

4.1 Derivaatan määritelmä ja derivoimissäännöt

Esimerkki 4.1.1 Esimerkissä 3.2.1 todettiin, että kappale putoaa vapaassa pudotuksessa siten, että ajassa $t > 0$ kuljettu matka $s(t)$ saadaan kaavasta

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

missä g on gravitaatiovakio, $g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$. Hetkellistä nopeutta hetkellä $t = 2$ arvioitiin erotusosamäärällä

$$\frac{s(2) - s(t)}{2 - t} = \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}, \quad t \neq 2.$$

On luonnollista määritellä hetkellinen nopeus hetkellä $t = 2$ raja-arvona

$$\lim_{t \to 2} \frac{s(2) - s(t)}{2 - t}.$$

Näin päädytään derivaatan käsitteeseen. Mitä kyseinen raja-arvo tarkoittaa havainnollisesti? Koska erotusosamäärä

$$\frac{s(2) - s(t)}{2 - t} = \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

on pisteiden $(2, s(2))$ ja $(t, s(t))$ kautta kulkevan suoran L_t kulmakerroin, niin raja-arvon

$$\lim_{t \to 2} \frac{s(2) - s(t)}{2 - t}$$

olemassaolo tarkoittaa sitä, että suora L_t ”asettuu paikoilleen”, kun $t \to 2$.

Määritelmä 4.1.2 Olkoon $f : B(x_0, r) \to \mathbf{R}$ funktio. Jos *erotusosamäärällä*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0,$$

on (äärellinen) raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

tätä raja-arvoa sanotaan *funktion* f *derivaataksi pisteessä* x_0. Merkitään

$$Df(x_0) := f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Sanotaan myös, että f *on derivoituva pisteessä* x_0. Suoraa

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

sanotaan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ liittyväksi kuvakäyrän $y = f(x)$ *tangentiksi.*

Jos f on derivoituva avoimen välin $\Delta \subset \mathbf{R}$ jokaisessa pisteessä, funktio f *on derivoituva (joukossa* Δ*)*. Tällöin jokaista $x \in \Delta$ vastaa luku $f'(x)$. Näin määriteltyä kuvausta $f' : \Delta \to \mathbf{R}$ kutsutaan funktion f *derivaataksi (derivaattakuvaukseksi)*.

Huomautus Usein erotusosamäärä kirjoitetaan muodossa

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

jolloin siis $h := x - x_0$ $(x = x_0 + h)$ ja

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Huomaa, että $h \to 0$ jos ja vain jos $x \to x_0$.

Esimerkki 4.1.3 (a) Olkoon $f(x) = c$ kaikilla $x \in B(x_0, r)$ (f vakiofunktio ympäristössä $B(x_0, r)$). Tällöin

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

(b) Määrätään funktion $f(x) = ax^2$, $a = \frac{1}{2}g$, derivaatta pisteessä $x_0 > 0$ suoraan määritelmästä. Saadaan

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 - ax_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ax_0h + ah^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(2ax_0 + ah) = 2ax_0 = gx_0. \end{aligned}$$

(c) Tarkastellaan funktion $f(x) = |x|$ derivaattaa pisteessä 0. Määrätään erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot. Kun $h > 0$, saadaan

$$f'_+(0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Kun taas $h < 0$, saadaan

$$f'_-(0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot (=toispuoleiset derivaatat $f'_+(0)$ ja $f'_-(0)$) ovat erisuuret, joten varsinaista raja-arvoa ei ole (Lemma 3.4.4). Siis f ei ole derivoituva origossa. Intuitiivinen tulkinta: Derivaattaa ei ole, jos funktion kuvaaja muodostaa "teräviä" kulmia. (Tällöin toispuoleiset derivaatat ovat eri suuret.)

(d) Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Aiemmin on todettu, että f on jatkuva origossa. Onko f derivoituva origossa? Jos $h \neq 0$, saadaan

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Mutta funktiolla $h \mapsto \sin \frac{1}{h}$ ei ole raja-arvoa origossa (Esimerkki 3.3.8 (c)). Siis f ei ole derivoituva origossa. Tässä tapauksessa funktion kuvaaja ei muodosta teräviä kulmia.

Esimerkin 4.1.3 kohdista (c) ja (d) nähdään, että jatkuvuus ei takaa derivoituvuutta. Käänteinen väite kuitenkin pätee:

Lause 4.1.4 Olkoon f derivoituva pisteessä x_0. Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0.

Todistus. Funktio f on määritelty jossain ympäristössä $B(x_0, r)$. Jos nyt $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$, saadaan

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0}(f(x_0) + (x - x_0)\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}) \\
&= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0}(x - x_0)\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0).
\end{aligned}$$

Siis f on jatkuva pisteessä x_0. $\square$

Ensimmäisenä derivaatan sovellutuksena tarkastellaan $\frac{0}{0}$-tyyppisiin raja-arvotilanteisiin liittyvää L'Hospitalin sääntöä:

Lause 4.1.5 (L'Hospitalin sääntö I) Olkoot $f, g : B(x_0, r) \to \mathbf{R}$ funktioita siten, että

(i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(ii) derivaatat $f'(x_0)$ ja $g'(x_0)$ ovat olemassa,

(iii) $g'(x_0) \neq 0$.

Tällöin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Todistus. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} &= \frac{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 4.1.6 (a) Määrätään $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$. Nyt $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x$, joten $f(0) = g(0) = 0$. Derivaatoiksi saadaan $f'(0) = e^0 = 1$ ja $g'(0) = 1$. Koska $g'(0) \neq 0$, niin Lauseen 4.1.5 nojalla

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Vastaavasti todetaan, että

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = \cos 0 = 1.$$

(Pidetään tässä tunnettuna tarvittavat eksponenttifunktion ja sinin ominaisuudet). Kyseiset raja-arvot on varsin hankala määrätä ilman derivaattaa.

(b) L'Hospitalin lauseen oletukset on ehdottomasti tarkistettava ennen lauseen soveltamista. Esimerkiksi "lasku"

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$$

on pahasti pielessä. Miksi?

Derivoimissääntöjä

Derivoimisen lähtökohtana ovat seuraavan lauseen antamat perussäännöt:

Lause 4.1.7 Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä x. Tällöin

(a) $D(f(x)+g(x)) = Df(x) + Dg(x)$,

(b) $D(cf(x)) = cD(x)$ kaikilla $c \in \mathbf{R}$.

(c) $D(f(x)g(x)) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$,

(d) $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}$ mikäli $g(x) \neq 0$.

Todistus. Kohdat (a), (b) ja (c) jätetään lukijalle. Todistetaan kohta (d). Tätä varten osoitetaan ensin, että

$$D\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}. \tag{1}$$

Jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)}.$$

Koska $\lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h} = -Dg(x)$ ja jatkuvuuden nojalla $\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}$, niin

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}.$$

Nyt yhtälön (1) ja kohdan (a) seurauksena

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = Df(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot -\frac{Dg(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.1.8 (a) Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja $f(x) = x^n$. Tällöin induktiolla seuraa helposti tulon derivoimissäännöstä, että

$$Df(x) = nx^{n-1}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Totea!

(b) Jos $f(x) = 2x^4 - 5x + 3$, niin kohdan (a), Esimerkin 4.1.3, Lemman 4.1.8 ja Lauseen 4.1.7 nojalla

$$f'(x) = D(2x^4) + D(-5x) + D(3) = 2Dx^4 - 5Dx + 0 = 8x^3 - 5.$$

Tähän tapaan voidaan derivoida jokainen polynomi, ts. jos

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

niin

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Esimerkki 4.1.9 Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja $f(x) = x^{-n}$. Nyt

$$Df(x) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{(x^n)^2} = -nx^{n-1}x^{-2n} = -nx^{-n-1}.$$

Siis Esimerkin 4.1.8 kaava pätee myös negatiivisille eksponenteille.

Lause 4.1.10 (Ketjusääntö) Olkoon g derivoituva pisteessä x ja f derivoituva pisteessä $g(x)$. Tällöin yhdistetty funktio $f \circ g$ on derivoituva pisteessä x ja

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Todistus. Tarkastellaan tässä yksinkertaisuuden vuoksi vain tapausta, jossa g on aidosti monotoninen eräässä x:n ympäristössä $B(x, r)$. Jos nyt $h \neq 0$ ja $x + h \in B(x, r)$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Tässä

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

Toisaalta g on jatkuva pisteessä x, joten $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$ ja näin ollen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)).$$

Väite saadaan yhdistämällä raja-arvoväitteet. $\square$

Esimerkki 4.1.11 (a) Olkoon $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$. Tällöin

$$f(x) = (g \circ h)(x),$$

missä $g(x) = \sqrt{x}$ ja $h(x) = x^2 + 5$. Koska $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (harjoitustehtävä), niin

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

(b) Olkoot $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivoituvia. Tällöin

$$(f \circ g \circ h)'(x) = (f \circ (g \circ h))'(x) = f'((g \circ h)(x))(g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Koska kuvausten yhdistäminen on liitännäinen operaatio, samaan tulokseen päädytään valitsemalla sulut toisin eli tulkitsemalla $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$.

(c) Derivoidaan funktio

$$x \mapsto \cos(e^{x+\sin x}) = \cos(\exp(x + \sin x)).$$

Pidetään tunnettuna, että $De^x = e^x$, $D \sin x = \cos x$ ja $D \cos x = -\sin x$. Merkitään

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(x), \\ g(x) &= e^x = \exp(x), \\ f(x) &= x + \sin(x), \end{aligned}$$

jolloin

$$\cos(e^{x+\sin x}) = (h \circ g \circ f)(x).$$

Yhdistetyn funktion derivaataksi saadaan

$$(h \circ g \circ f)'(x) = -\sin(e^{x+\sin x}) \cdot e^{x+\sin x} \cdot (1 + \cos x).$$

(d) Olkoon $f :]a, b[\to]c, d[$ derivoituva bijektio ja oletetaan, että $f^{-1} :]c, d[\to]a, b[$ on derivoituva. Tällöin kirjoittamalla

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

missä $x \in]a, b[$, saadaan derivoimalla puolittain kejusäännön nojalla

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1.$$

Siis

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Näin saadun käänteisfunktion derivoimiskaavan ongelmana on se, ettei käänteisfunktion f^{-1} derivoituvuudesta ole aina takeita. Asiaan palataan myöhemmin.

4.2 Väliarvolause

Väliarvolause antaa keskeinen keinon tarkastella funktion kulkua derivaatan avulla. Lauseen todistamiseksi tarvitaan ensin pari apuhavaintoa.

Lemma 4.2.1 Olkoon f derivoituva pisteessä x_0.

(i) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) < f(x_0)$ kun $x_0 - r < x < x_0$ ja $f(x) > f(x_0)$ kun $x_0 < x < x_0 + r$.

(ii) Jos $f'(x_0) < 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) > f(x_0)$ kun $x_0 - r < x < x_0$ ja $f(x) < f(x_0)$ kun $x_0 < x < x_0 + r$.

Todistus. (i) Koska

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: a > 0,$$

niin raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $r > 0$ siten, että

$$x \in B'(x_0, r) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| < \frac{a}{2}.$$

Tällöin kaikilla $x \in B'(x_0, r)$ pätee

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{a}{2} > 0.$$

Siis $f(x) < f(x_0)$ kun $x_0 - r < x < x_0$ ja $f(x) > f(x_0)$ kun $x_0 < x < x_0 + r$. Kohta (ii) todistetaan vastaavasti. $\square$

Lemma 4.2.2 Olkoon $x_0 \in]a, b[$ ja oletetaan, että kuvaus $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ saa suurimman tai pienimmän arvonsa pisteessä x_0 eli

$$f(x_0) = \max f(]a, b[) \quad \text{tai} \quad f(x_0) = \min f(]a, b[).$$

Tällöin $f'(x_0) = 0$, jos f on derivoituva pisteessä x_0.

Todistus. Oletetaan, että $f(x_0) = \max f(]a, b[)$ ja f on derivoituva pisteessä x_0. Väitteen todistamiseksi tehdään antiteesi $f'(x_0) \neq 0$. Jos nyt $f'(x_0) > 0$, niin Lemman 4.2.1 (i) mukaan on olemassa $r > 0$ siten, että $]x_0 - r, x_0 + r[\subset]a, b[$ sekä $f(x) < f(x_0)$ kun $x_0 - r < x < x_0$ ja $f(x) > f(x_0)$ kun $x_0 < x < x_0 + r$. Mutta tällöin $f(x_0)$ ei ole suurin arvo välillä $]a, b[$, mikä on ristiriita. Oletus $f'(x_0) < 0$ johtaa vastaavalla tavalla ristiriitaan. Pienintä arvoa koskeva väite todetaan vastaavasti. $\square$

Esimerkki (a) Lemmalle 4.2.2 käänteinen väite ei päde, ts. ehto $f'(x_0) = 0$ ei takaa sitä, että kyseessä on maksimi tai minimi välillä $]x_0 - r, x_0 + r[$. Esimerkiksi funktiolle $f(x) = x^3$ pätee $f'(0) = 0$. Silti $f(0) = 0$ ei ole maksimi tai minimi välillä $] - r, r[$, kun $r > 0$. Huomaa, että derivaatta $f'(x) = 3x^2$ ei vaihda merkkiään origossa.

(b) Funktiolla $f(x) = |x|$ on minimi origossa, mutta derivaattaa $f'(0)$ ei ole olemassa.

Lause 4.2.3 (Rollen lause) Oletetaan, että

(i) f on jatkuva välillä $[a, b]$,

(ii) f on derivoituva välillä $]a, b[$,

(iii) $f(a) = f(b) = 0$.

Tällöin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että $f'(c) = 0$.

Todistus. Lauseen 3.4.20 mukaan funktio f saa pienimmän arvonsa ja suurimman arvonsa välillä $[a, b]$. Olkoot $x_1, x_2 \in [a, b]$ siten, että

$$f(x_1) = \max f([a, b]) \quad \text{ja} \quad f(x_2) = \min f([a, b]).$$

Voidaan olettaa, että $f(x) \neq 0$ jollakin $x \in]a, b[$. Siis $f(x_1) \neq 0$ tai $f(x_2) \neq 0$ eli $x_1 \in]a, b[$ tai $x_2 \in]a, b[$. Lemman 4.2.2 mukaan joko $f'(x_1) = 0$ tai $f'(x_2) = 0$. $\square$

Esimerkki 4.2.4 Olkoon $a > 0$ ja $b, c \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että yhtälöllä

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

on korkeintaan kaksi reaalista juurta.

Perustelu: Derivaatta

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$$

on aidosti kasvava. Jos nimittäin $x < y$, niin $4x^3 < 4y^3$ ja $2ax < 2ay$. Näin ollen

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b < 4y^3 + 2ay + b = f'(y).$$

Nyt on olemassa korkeintaan yksi piste $x \in \mathbf{R}$ siten, että $f'(x) = 0$. Jos nimittäin derivaatalla on kaksi nollakohtaa, se ei ole aidosti kasvava. Nyt Rollen lauseesta seuraa, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on korkeintaan kaksi reaalista juurta. Tämän toteamiseksi tehdään antiteesi: On olemassa $x_1 < x_2 < x_3$ siten, että $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Nyt Rollen lauseen nojalla löydetään pisteet $c_1 \in]x_1, x_2[$ ja $c_2 \in]x_2, x_3[$ siten, että $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Ristiriita, joten väite seuraa.

Huomautus Yleistämällä Esimerkin 4.2.4 päättely todetaan, että jos derivoituvan funktion $f : \Delta \to \mathbf{R}$ derivaatalla f' on n nollakohtaa avoimella välillä $\Delta \subset \mathbf{R}$, niin funktiolla f on korkeintaan $n + 1$ nollakohtaa välillä Δ.

Lause 4.2.5 (Väliarvolause) Oletetaan, että

(i) f on jatkuva välillä $[a, b]$,

(ii) f on derivoituva välillä $]a, b[$.

Tällöin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Todistus. Määritellään apufunktio $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Funktio g on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Lisäksi

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0, \quad g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Rollen lauseen nojalla on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että $g'(c) = 0$. Mutta

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Väliarvolauseesta seuraa helposti *integraalilaskennan peruslause* (harjoitustehtävä):

Seuraus 4.2.6 Oletetaan, että

(i) f on jatkuva välillä $[a, b]$,

(ii) f on derivoituva välillä $]a, b[$,

(iii) $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Tällöin f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.

Esimerkki 4.2.7 Sovelletaan väliarvolausetta funktioon $f(x) = \sin x$. Koska $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, saadaan

$$|f(x) - f(0)| = |f'(c)(x - 0)| \leq |x|.$$

Koska $f(0) = 0$, pätee $|f(x)| \leq |x|$. Tämä arvio antaa välittömästi likiarvon

$$\sin 10^{-3} \in [-10^{-3}, 10^{-3}].$$

Arvio $|\sin x| \leq |x|$ auttaa myöskin hahmottamaan sinin kuvaajan kulkua origon lähellä, kun vielä muistetaan, että $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Väliarvolauseen avulla voidaan myöskin todistaa seuraava vahvempi versio L'Hospitalin lauseesta (todistus löytyy kirjasta Thomas: Calculus s. 1163-1164.)

Lause 4.2.8 (L'Hospitalin lause II) Olkoot $f, g : B(x_0, r) \to \mathbf{R}$ funktioita siten, että

(i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(ii) derivaatat $f'(x)$ ja $g'(x)$ ovat olemassa ympäristössä $B(x_0, r)$,

(iii) $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in B'(x_0, r)$.

Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Version II etuna on se, että sitä voidaan soveltaa monta kertaa peräkkäin:

Esimerkki 4.2.9 (a) Määrätään

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x} =: \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Koska $f(2) = g(2) = 2$, voitaisiin osoittaja ja nimittäjä jakaa lausekkeella $x - 2$ niin monta kertaa kuin mahdollista. L'Hospitalin lause II antaa kuitenkin toisen (usein helpomman) ratkaisun. Koska myös derivoituvuusoletukset (ii) ja (iii) ovat voimassa, saadaan L'Hospitalin lauseen II nojalla

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3 - 12x^2 + 10x - 4}{4x^3 - 15x^2 + 16x - 4}.$$

Edelleen $f'(2) = g'(2) = 0$, joten soveltamalla L'Hospitalin lausetta uudestaan saadaan

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{4x^3-12x^2+10x-4}{4x^3-15x^2+16x-4} = \lim_{x\to 2}\frac{12x^2-24x+10}{12x^2-30x+16} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

(b) L'Hospitalin lauseen II nojalla (tarkista oletukset!)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\tfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\tfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{0\cdot 2\sqrt{1+x}-1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{4(1+x)}\\ &= -\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}} = -\tfrac{1}{8}.\end{aligned}$$

Viimeisessä derivoinnissa on käytetty osamäärän derivoimiskaavaa.

4.3 Ääriarvot

Väliarvolauseen avulla päädytään derivoituvien funktioiden ääriarvo-ongelman ratkaisuun. Tarkastellaan ensin sitä, mitä derivaatan merkki kertoo funktion monotonisuudesta.

Lause 4.3.1 Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva.

(i) Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, niin f on aidosti kasvava välillä $[a,b]$.

(ii) Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, niin f on aidosti vähenevä välillä $[a,b]$.

Todistus. (i) Jos $x, y \in [a,b]$ ja $x < y$, niin väliarvolauseen ja oletuksen mukaan

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) > 0.$$

Siis $f(x) < f(y)$ eli f on aidosti kasvava välillä $[a,b]$. Kohta (ii) vastaavasti. □

Huomautus 4.3.2 Lauseen 4.3.1 väitteet yleistyvät helposti myös muun tyyppisille väleille. Derivaattaa koskevat oletukset tarvitaan vain vastaavalla avoimella välillä, jos jatkuvuusoletus pätee myös välin mahdollisissa päätepisteissä. Nämä yleistykset pidetään jatkossa tunnettuina.

Määritelmä 4.3.3 Funktiolla f on pisteessä x_0 *lokaali maksimikohta* (vastaavasti *lokaali minimikohta*), jos $f(x_0)$ on funktion f suurin (vastaavasti pienin) arvo jossakin pisteen x_0 ympäristössä $B(x,r)$. Arvoa $f(x_0)$ sanotaan tällöin *lokaaliksi maksimiarvoksi* (vastaavasti *lokaaliksi minimiarvoksi*).

Nimityksiä *(Lokaali) ääriarvokohta* on joko lokaali maksimikohta tai lokaali minimikohta. *(Lokaali) ääriarvo* on joko lokaali maksimi tai lokaali minimi.

Puhutaan myös *oleellisesta maksimista* (vastaavasti *oleellisesta minimistä*), jos $f(x_0) > f(x)$ (vastaavasti $f(x_0) < f(x)$) kaikilla $x \in B'(x_0,r)$.

Lause 4.3.4 Olkoon $f : B(x_0,r) \to \mathbf{R}$ jatkuva ja oletetaan, että f on derivoituva punkteeratussa ympäristössä $B'(x_0,r)$.

(i) Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0[$ ja $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimi.

(ii) Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0[$ ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali minimi.

Todistus. Todistetaan (i): Jos $x \in]x_0 - r, x_0[$, niin väliarvolausetta voidaan soveltaa välillä $[x, x_0]$. Saadaan

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x),$$

missä $c \in]x, x_0[$. Nyt oletuksen mukaan $f'(c) > 0$ ja $x_0 - x > 0$, joten $f(x_0) - f(x) > 0$ eli $f(x_0) > f(x)$. Vastaavasti, jos $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin

$$f(x) - f(x_0) = f'(c^*)(x - x_0),$$

missä $c^* \in]x_0, x[$. Koska oletuksen mukaan $f'(c^*) < 0$, saadaan $f(x) - f(x_0) < 0$ eli $f(x) < f(x_0)$. Väite seuraa. Kohta (ii) todetaan vastaavasti. □

Esimerkki 4.3.5 (a) Olkoon

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0 \\ -1, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

ja f on jatkuva myös origossa. Lauseen 4.3.4 kohdan (ii) mukaan funktiolla f on origossa (lokaali) minimi.

(b) Määrätään funktion

$$f(x) = x^2(x-1)^3$$

pienin ja suurin arvo välillä $[-1, 1]$. Huomaa ensinnäkin, että suurin ja pienin arvo ovat olemassa koska f on suljetulla välillä $[-1, 1]$ jatkuva. Koska funktio f on derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä, on kaikissa ääriarvokohdissa $f'(x) = 0$. Riittää siis määrätä funktion arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä. Derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cdot 3(x-1)^2 + 2x(x-1)^3 = (x-1)^2\Big(3x^2 + 2x(x-1)\Big) \\ &= x(3x + 2x - 2)(x-1)^2 = 5x(x - \tfrac{2}{5})(x-1)^2. \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = 0$ kun $x = 0, \frac{2}{5}$ tai 1. Nyt

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(-1) = -8, \quad -1 < f(\frac{2}{5}) < 0,$$

joten suurin arvo on $f(0) = f(1) = 0$ ja pienin arvo $f(-1) = -8$.

Globaalien ääriarvo-ongelmien yhteydessä tarvitaan yleensä lisätarkasteluja sen selvittämiseen, antavatko lokaalit ääriarvot myös globaaleja ääriarvoja:

Esimerkki 4.3.6 (a) Määrää käyrän $y = x^2$ etäisyys pisteestä $(2, \frac{1}{2})$. Ko. etäisyys saadaan minimoimalla funktion

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2}$$

arvo kun $x \in \mathbf{R}$. Koska neliöjuuri on aidosti kasvava, f saa pienimmän arvonsa täsmälleen silloin kun funktio

$$g(x) = (x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^2 - 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = x^4 - 4x + \frac{17}{4}$$

saa pienimmän arvonsa joukossa $\mathbf{R}$. Koska g:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, voidaan pitää selvänä sitä, että derivaatan avulla saatava lokaali minimi on myös globaali minimi. Nyt

$$g'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1.$$

Koska $g'(x) < 0$ kun $x \in]-\infty, 1[$ ja $g'(x) > 0$ kun $x \in]1, \infty[$, niin Lauseen 4.3.4 mukaan funktiolla g on pisteessä $x = 1$ lokaali minimi. Kyseessä on myös pienin arvo joukossa $\mathbf{R}$, sillä g on välillä $]-\infty, 1]$ aidosti vähenevä ja välillä $[1, +\infty[$ aidosti kasvava (Huomautus 4.3.2). Kysytty etäisyys on siis

$$f(1) = \sqrt{g(1)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vastaava tehtävä johtaa yleisessä tilanteessa helposti laskuteknisiin ongelmiin koska ratkaisu edellyttää kolmannen asteen polynomin nollakohtien määräämistä, ks. Cardanon kaava.

(b) Onko funktiolla

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$$

pienintä tai suurinta arvoa joukossa $\mathbf{R}$? Derivaataksi saadaan

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (1+x^6) - 6x^5 \cdot x^3}{(1+x^6)^2} = \frac{3x^2(1+x^6-2x^6)}{(1+x^6)^2} = \frac{3x^2(1-x^3)(1+x^3)}{(1+x^6)^2},$$

joten $f'(x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$, $x = 1$ tai $x = -1$. Arvoiksi derivaatan nollakohdissa saadaan

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Toisaalta

$$0 \le f(x) = \frac{x^3}{1+x^6} = \frac{1}{\frac{1}{x^3} + x^3} \le \frac{1}{8} \tag{2}$$

kun $x \ge 2$ ja

$$0 \ge f(x) = \frac{x^3}{1+x^6} = \frac{1}{\frac{1}{x^3} + x^3} \ge -\frac{1}{8} \tag{3}$$

kun $x \le -2$, joten funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa $\mathbf{R}$ välillä $[-2, 2]$ (Lause 3.4.20). Arvioiden (2) ja (3) nojalla $f(-1) = -\frac{1}{2}$ on pienin arvo ja $f(1) = \frac{1}{2}$ on suurin arvo joukossa $\mathbf{R}$.

(c) Onko funktiolla

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$$

pienintä tai suurinta arvoa välillä $[1, +\infty[$? Derivaataksi saadaan

$$f'(x) = \frac{2x(x^2) - 2x(x^2+1)}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3},$$

joten $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]1, +\infty[$. Siis f on välillä $[1, +\infty[$ aidosti vähenevä (Lause 4.3.1 ja Huomautus 4.3.2). Näin ollen $f(1) = 2$ on suurin arvo. Koska f on aidosti vähenevä välillä $[1, +\infty[$, pienintä arvoa ei ole. Täsmällinen perustelu saadaan antiteesin kautta seuraavasti: Oletetaan vastoin väitettä, että $f(x_0)$ on pienin arvo joukossa $[1, +\infty[$, $x_0 \geq 1$. Tällöin aidon vähenevyyden nojalla $f(x) < f(x_0)$ kun $x > x_0$. Siis $f(x_0)$ ei ole pienin arvo. Ristiriita, joten pienintä arvoa ei ole.

4.4 Toinen derivaatta

Jos funktio f on derivoituva avoimen välin $\Delta \subset \mathbf{R}$ jokaisessa pisteessä, derivaatta määrittelee funktion $f' : \Delta \to \mathbf{R}$.

Jos tällä funktiolla f' on pisteessä $x \in \Delta$ derivaatta, niin kyseistä derivaattaa $Df'(x)$ sanotaan funktion f *toiseksi derivaataksi pisteessä* x, merkitään $f''(x)$ tai $f^{(2)}(x)$ tai $D^2f(x)$. Jos funktio $x \mapsto f''(x)$ on jatkuva välillä Δ, merkitään $f \in \mathbf{C}^2(\Delta)$. Vastaavaan tapaan määritellään yleisesti *n:nnen kertaluvun derivaatta* $f^{(n)}(x)$ asettamalla

$$f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x),$$

missä $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Esimerkki 4.4.1 (a) Jos $f(x) = x^4 - 2x$, niin

$$f''(x) = D(f'(x)) = D(4x^3 - 2) = 12x^2.$$

(b) Olkoon $f(x) = x|x|$ eli

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Nyt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

kaikilla $x \neq 0$ ja

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0.$$

Siis $f'(x) = 2|x|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Edelleen

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0. \end{cases}$$

Onko toinen derivaatta origossa olemassa? Ensimmäisen derivaatan erotusosamäärä origossa on muotoa
$$\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \frac{2|h|}{h} = \begin{cases} 2, & h>0 \\ -2, & h<0. \end{cases}$$
Siis erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa origossa eli lukua $f''(0)$ *ei ole* olemassa. Nyt $f \in \mathbf{C}^2(]0,1[)$, mutta $f \notin \mathbf{C}^2(]-1,1[)$.

Korkeammat derivaatat tulevat jatkossa vastaan (kurssilla Analyysi III) Taylorin kaavan yhteydessä. Esimerkkinä toisen derivaatan merkityksestä tarkastellaan lyhyesti konveksisuuden käsitettä. Konveksisuus on keskeisessä roolissa monissa matematiikan sovellutuksissa, esim. optimoinnissa ja peliteoriassa. Asiaa sivutaan myös useamman muuttujan ääriarvojen yhteydessä kurssilla Analyysi II.

Määritelmä 4.4.2 Olkoon $\Delta \subset \mathbf{R}$ väli. Funktio $f : \Delta \to \mathbf{R}$ on *konveksi*, jos
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
kaikilla $x, y \in \Delta$ ja $0 < \lambda < 1$. Funktio f on *konkaavi*, jos $-f$ on konveksi.

Huomautus 4.4.3 Geometrisesti konveksisuusehto tarkoittaa sitä, että kahden kuvaajan $y = f(x)$ pisteen $P = (x, f(x)$ ja $Q = (y, f(y))$ välinen jana PQ aina sijaitsee kuvaajan $y = f(x)$ yläpuolella. Nimittäin pisteiden $R = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$ ja P kautta kulkevan suoran kulmakertoimeksi saadaan
$$\frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} = \frac{(\lambda-1)(f(x)-f(y)}{(\lambda-1)(x-y)} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$
Siis R sijaitsee pisteiden P ja Q kautta kulkevalla suoralla. On ilmeistä, että R itseasiassa on janalla PQ. Konkaavisuus tarkoittaa sitä, että kahden kuvaajan $y = f(x)$ pisteen $P = (x, f(x)$ ja $Q = (y, f(y))$ välinen jana PQ aina sijaitsee kuvaajan $y = f(x)$ alapuolella.

Konveksisuuden yhteys toiseen derivaattaan käy ilmi seuraavasta tuloksesta, jonka todistus tässä sivuutetaan:

Lause 4.4.4 Olkoon f avoimella välillä Δ derivoituva. Tällöin seuraavat väitteet (i)-(iii) ovat ekvivalentteja:

(i) f on konveksi välillä Δ,

(ii) f' on kasvava välillä Δ,

(iii) f on *alaspäin kupera* eli kuvaajan $y = f(x)$ jokainen tangentti on kuvaajan alapuolella.

Vastaavasti väitteet (i')-(iii') ovat ekvivalentteja:

(i') f on konkaavi välillä Δ,

(ii') f' on vähenevä välillä Δ,

(iii') f on *ylöspäin kupera* eli kuvaajan $y = f(x)$ jokainen tangentti on kuvaajan yläpuolella.

Huomautus Lauseen 4.4.4 ehdot (i)-(iii) pätevät erityisesti jos $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Ehdot (i')-(iii') pätevät erityisesti jos $f''(x) \leq 0$ kaikilla $x \in \Delta$.

Määritelmä 4.4.5 Piste x_0 on funktion f *käännepiste*, jos $f''(x_0) = 0$ ja $f''(x)$ on erimerkkinen pisteen x_0 eri puolilla jossakin ympäristössä $B(x_0, r)$.

Esimerkki 4.4.6 Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = (x-4)^3.$$

Tällöin $f''(x) = 6(x-4) < 0$ arvoja kun $x < 4$ (tuolloin kuvaaja on ylöspäin kupera) ja $f''(x) > 0$ kun $x > 4$ (tuolloin kuvaaja on alaspäin kupera). Piste 4 on funktion f käännepiste.

4.5 Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä on klassinen metodi, jonka avulla voidaan esimerkiksi löytää likiarvoja algebrallisen yhtälön $P(x) = 0$ ratkaisuille. Menetelmä on nykyäänkin yleisesti käytössä mm. matemaattisissa tietokoneohjelmissa.

Etsittäessä likiarvoa yhtälön $f(x) = 0$ tietylle nollakohdalle menetellään seuraavasti:

1. Arvataan lähtöpiste x_0 "riittävän läheltä"etsittävää nollakohtaa.
2. Piirretään pisteeseen $(x_0, f(x_0)$ funktion f kuvaajan tangentti T_1.
3. Asetetaan $x_1 :=$ tangentin T_1 ja x-akselin leikkauskohta.
4. Piirretään pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ tangentti T_2.
5. Asetetaan $x_2 :=$ tangentin T_2 ja x-akselin leikkauskohta.

Yleisesti, jos piste x_n on löydetty, seuraava piste lasketaan kaavasta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tämä vastaa esitettyä geometrista ideaa: Pisteeseen $(x_n, f(x_n))$ liittyvän tangentin yhtälö on

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste $(x_{n+1}, 0)$ toteuttaa

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \iff x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

olettaen, että $f'(x_n) = 0$.

Newtonin menetelmässä siis arvataan x_0 (mahdollisimman läheltä oletettua nollakohtaa). Jos n:s approksimaatio x_n on laskettu, x_{n+1} saadaan kaavasta (4). Likiarvot x_n lähestyvät nopeasti etsittävää nollakohtaa, mikäli tietyt edellytykset ovat voimassa.

Esimerkki 4.5.1 Lasketaan $\sqrt{2}$:n likiarvo eli etsitään likiarvo yhtälön

$$f(x) := x^2 - 2 = 0$$

positiiviselle ratkaisulle.

Ratkaisu. Koska

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{ja} \quad f'(x) = 2x,$$

yhtälö (4) saa muodon

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Asettamalla $x_0 = 1$ ja laskemalla lukuja x_n saadaan

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = \tfrac{3}{2} = 1.5,$$

$$x_2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{17}{12} \approx 1.41667,$$

$$x_3 = \tfrac{17}{24} + \tfrac{12}{17} \approx 1.41422 \text{ (5 oikeaa numeroa!)}.$$

Huomautus 4.5.2 Newtonin menetelmän suppenemisesta voidaan todistaa seuraavaa.

(a) Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta $r \in \mathbf{R}$. Jos on olemassa ympäristö $B(r,h)$, $h > 0$, ja vakio $0 < C < 1$ siten, että

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq C \quad \text{kaikilla } x \in B(r,h),$$

niin $\lim_{n\to\infty} x_n = r$, jos $x_0 \in B(r,h)$. Esimerkin $f(x) = x^2 - 2$ tapauksessa ehto

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{2(x^2-2)}{4x^2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{3}{4}$$

pätee kunhan $\frac{1}{x^2} \leq \frac{5}{4}$ eli kun $x^2 \geq \frac{4}{5}$.

(b) Ehto $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ pätee myös, jos f on konveksi pisteiden x_0 ja r välillä.

(c) Newtonin metodi on usein käyttökelpoinen, mutta siinä on omat ongelmakohtansa, ks. esim. Thomas: Calculus, ss. 297–302.

4.6 Raja-arvot äärettömässä ja globaalit ääriarvot

Määritelmä 4.6.1 Funktiolla $f\ :]c,+\infty[\to \mathbf{R}$ on *raja-arvo* $a \in \mathbf{R}$ *pisteessä* $+\infty$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luku $M > 0$ siten, että

$$x > M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

Huomaa, että Määritelmä 4.6.1 on analoginen jonon raja-arvon määritelmän kanssa. Funktion (äärellinen) raja-arvo pisteessä $-\infty$ määritellään vastaavaan tapaan:

Määritelmä 4.6.2 Funktiolla $f :]-\infty, c[\to \mathbf{R}$ on *raja-arvo* $a \in \mathbf{R}$ *pisteessä* $-\infty$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luku $m < 0$ siten, että

$$x < m \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a.$$

Esimerkki 4.6.3 Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ jos ja vain jos $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. Jos nyt $x < 0$, niin epäyhtälö $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ pätee täsmälleen silloin kun $-x > \frac{1}{\varepsilon}$ eli kun $x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Valitaan $m := -\frac{1}{\varepsilon} < 0$. Tällöin ehdosta $x < m$ seuraa $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$. Väite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

todistetaan aivan kuten jonojen yhteydessä.

Huomautus 4.6.4 Seuraavat aiemmin jonon raja-arvolle todistetut ominaisuudet pätevät myös funktion raja-arvoille äärettömässä. Todistukset ovat täysin analogisia. Tulokset pidetään tunnettuna.

Yhteen- ja kertolaskusäännöt: Oletetaan, että $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = b$. Tällöin

(i) $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$,

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} cf(x) = ca$ kaikilla $c \in \mathbf{R}$,

(iii) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)g(x) = ab$,

(iv) $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ jos $b \neq 0$.

Tässä *plus-merkit vastaavat toisiaan ja miinus-merkit toisiaan.*

Myös kuristusperiaatteet ovat voimassa kummallekin raja-arvolle äärettömässä, mutta emme tarvitse niitä tässä yhteydessä.

Esimerkki 4.6.5 Esimerkin 4.6.3 ja Huomautuksen 4.6.4 nojalla rationaalifunktioiden raja-arvot äärettömässä saadaan samaan tapaan kuin lukujonojen tapauksessa. Esimerkiksi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 1}{3x^3 - 5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

Vastaavasti

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 1}{3x^4 - 5x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{5}{x}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Jos jatkuvalla funktiolla $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on äärelliset raja-arvot pisteissä $\pm\infty$, raja-arvojen määritelmiä käyttäen on helppo todistaa seuraava tulos:

Lause 4.6.6 Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio, jolle

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Tällöin f saa joukossa $\mathbf{R}$ suurimman arvonsa, jos $f(x_1) > \max(a,b)$ jollekin $x_1 \in \mathbf{R}$ ja f saa joukossa $\mathbf{R}$ pienimmän arvonsa, jos $f(x_2) < \min(a,b)$ jollekin $x_2 \in \mathbf{R}$.

Todistus. Todistetaan suurinta arvoa koskeva väite, pienintä arvoa koskeva väite todistetaan samalla tavalla. Olkoon

$$\varepsilon := \frac{f(x_1) - \max(a,b)}{2}.$$

Tällöin Määritelmien 4.6.1 ja 4.6.2 mukaan on olemassa luvut $M > 0$ ja $m < 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{kun } x < m$$

ja

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{kun } x > M.$$

Näistä epäyhtälöistä päätellään, että $f(x) < f(x_1)$ kaikilla $x < m$ ja $f(x) < f(x_1)$ kaikilla $x > M$. Toisaalta suljetulla välillä $[m, M]$ funktio f saa jatkuvana suurimman arvonsa $\geq f(x_1)$, joka on välttämättä suurin arvo joukossa $\mathbf{R}$. $\square$

Esimerkki 4.6.7 (a) Esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$$

pätee $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Koska $f(1) > 0$ ja $f(-1) < 0$, pienin ja suurin arvo ovat olemassa joukossa $\mathbf{R}$ Lauseen 4.6.6 nojalla.

(b) Olkoon

$$f(x) = \frac{2x^4 - 10x + 1}{3x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Nyt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{3}$. Koska $f(0) = 1$ ja $f(1) = -\frac{7}{6}$, funktiolla f on suurin ja pienin arvo joukossa $\mathbf{R}$ Lauseen 4.6.6 nojalla. Suurin ja pienin arvo löytyvät derivaatan nollakohdista. Nyt derivaataksi saadaan

$$f'(x) = \frac{(8x^3 - 10)(3x^4 + 2x^2 + 1) - (12x^3 + 4x)(2x^4 - 10x + 1)}{(3x^4 + 2x^2 + 1)^2}.$$

Tässä osoittaja on viidennen asteen polynomi, joten derivaatan nollakohtien (tarkkojen arvojen) määrääminen on vaikeaa. On siis helppo antaa esimerkkejä rationaalifunktioista, joiden tarkkojen globaalien ääriarvojen määrääminen on vaikea (ellei mahdoton) tehtävä.