Analyysi I

Visa Latvala

29. marraskuuta 2004

Sisältö

5 Alkeisfunktioista

Alkeisfunktiot luokitellaan usein *algebrallisiin funktioihin* ja *transkendenttifunktioihin*, ks. Thomas: Calculus, s. 469. Algebrallisia funktioita ovat rationaalifunktioiden lisäksi esimerkiksi juurifunktiot, kun taas transkendenttifunktioita ovat mm. trigonometriset funktiot, niiden käänteisfunktiot sekä eksponentti- ja logaritmifunktiot.

5.1 Trigonometriset funktiot

Sini ja kosini määritellään kirjallisuudessa usein potenssisarjaesitysten avulla. Tässä määrittelyn lähtökohdaksi otetaan yksikköympyrän kehän pisteet eli tason pisteet $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, joille pätee

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Jokaista lukua (kulmaa) $t > 0$ (*radiaaneina*) vastaa yksikäsitteinen kehäpiste (x, y), $x^2 + y^2 = 1$, kuljettaessa pisteestä $(1, 0)$ *vastapäivään (positiiviseen suuntaan)* pitkin yksikköympyrän kehää t:n pituinen matka. Toisaalta jokaista lukua (kulmaa) $t < 0$ (radiaania) vastaa yksikäsitteinen kehäpiste (x, y), $x^2 + y^2 = 1$, kuljettaessa pisteestä $(1, 0)$ *myötäpäivään (negatiiviseen suuntaan)*pitkin yksikköympyrän kehää $|t|$:n pituinen matka. Lukua (kulmaa) 0 radiaania vastaa kehäpiste $(1, 0)$.

Funktiot $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään radiaanikulmaa vastaavien kehäpisteen koordinaattien avulla asettamalla

$$\sin t = y \quad \text{ja} \quad \cos t = x,$$

missä (x, y) on kulmaan t yksikäsitteisesti liittyvä yksikköympyrän kehäpiste t:n merkin mukaan suunnistettuna. Siis kierretään positiiviseen suuntaan, jos $t > 0$ ja negatiiviseen suuntaan, jos $t < 0$.

Koska kulmia t ja $t + n \cdot 2\pi$ vastaa aina samat kehäkulmat, sinillä ja kosinilla on jaksollisuusominaisuudet

$$\sin t = \sin(t + n \cdot 2\pi) \quad \text{ja} \quad \cos t = \cos(t + n \cdot 2\pi) \tag{1}$$

kaikilla $t \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{Z}$.

Määritelmästä lähtien voidaan todistaa seuraavat sinin ja kosinin *avainominaisuudet*, joista muut jatkossa tarvittavat ominaisuudet seuraavat:

Lause 5.1.1 Sinillä ja kosinilla on ominaisuudet (i)-(iv):

(i) $\sin 0 = 0$ ja $\cos 0 = 1$,

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$,

(iii) Yhteenlaskukaavat

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{aligned} \tag{2}$$

pätevät kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$,

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Huomaa, että tässä (ja yleensä jatkossa) x ja y ovat kulmia, eivät kehäpisteen koordinaatteja.

Todistus. Ehdot (i) ovat määritelmän nojalla selviä. Myös ehto (ii) on ilmeinen, sillä tason piste $(\cos x, \sin x)$ sijaitsee yksikköympyrän kehällä ja siis

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ehdot (iii) ja (iv) ovat verrattain hankalia todistaa esitetyn määrittelyn pohjalta ja niiden todistukset sivuutetaan tässä. Ehdon (iii) todistus löytyy lukion oppikirjasta Merikoski, Niva, Oinas-Kukkonen: Akseli 2, 1984, ss. 84–84. Ehto (iv) on todistettu kurssikirjassa Thomas: Calculus, ss. 106–107. $\square$

Huomautus 5.1.2 Lauseen 5.1.1 kohdasta (ii) seuraa välittömästi, että

$$|\sin x| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |\cos x| \leq 1$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Huomaa myös, että jaksollisuudesta johtuen sinin ja kosinin kuvaajan kulku tulee olennaisesti hahmotettua, kun hahmotetaan kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$. Tutkimalla yksikköympyrän kehäpisteen koordinaattien käyttäytymistä nähdään esimerkiksi, että

$$\sin\tfrac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin\tfrac{3\pi}{2} = -1 \quad \text{ja} \quad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0 = \cos\tfrac{3\pi}{2},\ \cos\pi = -1,$$

$$\sin x > 0 \text{ kun } 0 < x < \pi \text{ ja } \sin x < 0 \text{ kun } \pi < x < 2\pi,$$

$$\cos x > 0 \text{ kun } 0 < x < \tfrac{\pi}{2} \text{ tai } \tfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ sekä } \cos x < 0 \text{ kun } \tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{3\pi}{2}.$$

Sinin ja kosinin ominaisuuksia

Lause 5.1.3 Sini on pariton ja kosini on parillinen eli

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{ja} \quad \cos(-x) = \cos x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Jos $t \in [0, 2\pi[$, niin $\sin(-t) = -\sin t$, koska kulmia t ja $-t$ vastaavien kehäpisteiden y-koordinaatit ovat toistensa vastalukuja. Jos $t \notin [0, 2\pi[$, niin valitaan $n \in \mathbf{Z}$ siten, että $t + n \cdot 2\pi \in [0, 2\pi[$. Jaksollisuuden ja todistuksen alun nojalla

$$\sin(-t) = \sin(-t - n \cdot 2\pi) = -\sin(t + n \cdot 2\pi) = -\sin t.$$

Vastaavasti, jos $t \in [0, 2\pi[$, niin $\cos(-t) = \cos t$, koska kulmia t ja $-t$ vastaavien kehäpisteiden x-koordinaatit ovat samat. Yleistys tilanteeseen $t \notin [0, 2\pi[$ suoritetaan jaksollisuuden avulla kuten edellä. $\square$

Lauseen 5.1.1 yhteenlaskukaavoista saadaan erikoistapauksena seuraavat aputulokset:

Lause 5.1.4 Kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee

(a) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$,

(b) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,

(c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 5.1.5 Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Huomaa, että tulosta tarvitaan sinin ja kosinin derivoimiskaavojen johtamiseen. Tämän vuoksi ei ole loogisesti mielekästä käyttää L'Hospitalin lausetta tuloksen perustelemiseen.

Kaksinkertaisen kosinin kaavasta saadaan

$$\cos x - 1 = \cos(2\cdot\frac{x}{2}) - 1 = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}) = -2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Siis

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} = -\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}.$$

Tutkimalla sinin määritelmää yksikköympyrän ensimmäisessä ja neljännessä neljänneksessä nähdään, että $|\sin x| \le |x|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Näin ollen kuristusperiaatteesta seuraa, että $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ eli sini on jatkuva origossa. Koska

$$\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right| \le 1,$$

kuristusperiaatteesta seuraa edelleen, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Sinin ja kosinin derivaattatulokset seuraavat Lauseen 5.1.1 kohdista (iii) ja (iv):

Lause 5.1.6 Kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee

$$D\sin x = \cos x \quad \text{ja} \quad D\cos x = -\sin x.$$

Todistus. Olkoon $h \neq 0$. Yhteenlaskukaavan mukaan

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Tällä lausekkeella on raja-arvon laskusääntöjen, Lauseen 5.1.1 kohdan (iv) ja Esimerkin 5.1.5 nojalla raja-arvo $\cos x$ kun $h \to 0$. Toinen sääntö todetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). □

Huomautus Sini ja kosini ovat joukossa $\mathbf{R}$ jatkuvia, koska ne ovat derivoituvia.

Trigonometrisiä funktioita sisältävistä yhtälöistä

Esimerkki 5.1.7 (a) Ratkaistaan yhtälö $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{3})$. Kahden kulman sinit yhtyvät täsmälleen silloin kun vastaavat kehäpisteet ovat samat tai ne sijaitsevat symmetrisesti y-akselin suhteen. Näin ollen yhtälö pätee jos ja vain jos

$$2x = x + \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - (x + \frac{\pi}{3}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Siis

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tai} \quad 3x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Jälkimmäinen ehto pätee jos ja vain jos $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Siis vastaus on

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tai} \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

(b) Ratkaistaan yhtälö $\cos 2x = \sin x$. Kaavaa $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ käyttäen yhtälö saadaan muotoon

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x).$$

Kahden kulman kosinit yhtyvät täsmälleen silloin kun vastaavat kehäpisteet ovat samat tai ne sijaitsevat symmetrisesti x-akselin suhteen. Näin ollen yhtälö pätee jos ja vain jos

$$2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tai} \quad 2x = -(\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Siis

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Oikeanpuoleiset ratkaisut sisältyvät vasemmanpuoleisiin, joten ratkaisujoukko on

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Huomautus 5.1.8 Esimerkin 5.1.7 perusteluin päätellään yleisesti: Jos f ja g ovat mitä tahansa reaalifunktioita, yhtälö

$$\sin f(x) = \sin g(x)$$

pätee jos ja vain jos

$$f(x) = g(x) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tai} \quad f(x) = \pi - g(x) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Vastaavasti

$$\cos f(x) = \cos g(x)$$

toteutuu jos ja vain jos

$$f(x) = g(x) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad f(x) = -g(x) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Määritelmä 5.1.9 Funktiot *tangentti* tan ja *kotangentti* cot määritellään asettamalla

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

ja

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista saadaan nimittäjän nollakohtien ulkopuolella

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Näin ollen tangentilla on jaksona π eli tangentin kuvaaja on muodoltaan samanlainen jokaisella välillä $]-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$. Annetulla välillä $]-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n[$ tangentti on aidosti kasvavana injektio, ks. Huomautus 5.1.13. Tämän vuoksi yhtälön

$$\tan f(x) = \tan g(x)$$

ratkaisujoukko on $f(x) = g(x) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Vastaavasti perustellaan se, että kotangentin jakso on π ja että yhtälön

$$\cot f(x) = \cot g(x)$$

ratkaisujoukko on $f(x) = g(x) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Esimerkki 5.1.10 (a) Ratkaistaan yhtälö $\tan x = \cot(x-\pi)$. Jotta funktiot ovat määriteltyjä, on oltava

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{ja} \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Esittämällä funktiot sinin ja kosinin avulla saadaan

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)}.$$

Ehtojen (3) voimassa ollessa edellinen yhtälö on ekvivalentti yhtälön

$$\sin x \sin(x-\pi) - \cos x \cos(x-\pi) = 0 \iff \cos(x+x-\pi) = 0 \iff \cos(2x-\pi) = 0$$

kanssa kosinin yhteenlaskukaavan nojalla. Yhtälön $\cos(2x-\pi) = 0$ ratkaisujoukoksi saadaan

$$2x - \pi = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{eli} \quad x = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Samalla idealla voidaan yleisesti ratkaista yhtälö tyyppiä $\tan f(x) = \cot g(x)$.

(b) Trigonometriset epäyhtälöt ratkaistaan siten, että ratkaistaan vastaava yhtälö ja suoritetaan merkkitarkastelu nollakohtien ja mahdollisten epäjatkuvuuskohtien molemmin puolin. Tarkastellaan epäyhtälöä

$$\tan x < \tan 2x.$$

Merkitään $f(x) = \tan x - \tan 2x$. Nyt funktion f nollakohdat ovat $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (totea!). Koska funktiolla f on jaksona π, riittää suorittaa merkkitarkastelu välillä $[0, \pi]$ epäjatkuvuuskohtien $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{4}$ molemmin puolin. Laskemalla arvot

$$\begin{aligned} f(\tfrac{\pi}{6}) &= -\tfrac{2}{3}\sqrt{3} < 0, \\ f(\tfrac{\pi}{3}) &= 2\sqrt{3} > 0, \\ f(\tfrac{2\pi}{3}) &= -2\sqrt{3} < 0, \\ f(\tfrac{5\pi}{6}) &= \tfrac{2}{3}\sqrt{3} > 0, \end{aligned}$$

todetaan, että epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisujoukko on

$$\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n.$$

Esimerkki 5.1.11 Muotoa $\frac{0}{0}$ olevat trigonometriset raja-arvot ratkeavat joko L'Hospitalin lauseen (versio I tai II) avulla tai käyttäen raja-arvon laskusääntöjä ja tunnettuja ominaisuuksia. Esimerkiksi

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin}{x}} \cdot \cos x = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1.$$

Toisaalta L'Hospitalin lauseen II nojalla

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

Monet trigonometriset raja-arvot ratkeavat helposti L'Hospitalin lauseen (tai Taylorin kaavan) avulla, mutta ovat työläitä selvittää ilman derivaattaa.

Erilaiset tangentin ja kotangentin laskusäännöt johdetaan sinin ja kosinin laskusäännöistä. Tyydymme tässä vain esittämään tangentin ja kotangentin derivoimiskaavat.

Lause 5.1.12 Nimittäjän nollakohtien ulkopuolella pätee

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

ja

$$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Todistus. Ensimmäiset väitteet saadaan osamäärän derivoimiskaavalla. Jälkimmäisissä käytetään kaavaa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. □

Huomautus 5.1.13 (a) Olkoon $n \in \mathbf{Z}$. Tangentti on välillä $]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n[$ aidosti kasvavana injektio, sillä $D \tan x = 1 + \tan^2 x > 0$ kun $x \in]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n[$ (Huomautus 4.3.2). Vastaavasti nähdään, että kotangentti on välillä $]\pi n, \pi + \pi n[$ aidosti vähenevänä injektio.

(b) Tangentti on myös surjektio joukosta $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ joukkoon $\mathbf{R}$. Tämä voidaan todistaa yhdistämällä Bolzanon lauseen käyttö raja-arvojen

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \sin x = -1, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1, \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0, \qquad (4)$$

määritelmiin. Sivuutamme tässä perustelun yksityiskohdat. Vastaavaan tapaan voidaan todistaa myös se, että $\cot :]0, \pi[\to \mathbf{R}$ on surjektio.

Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot eli arkusfunktiot

Edellä esitellyt trigonometriset funktiot eivät ole bijektioita joukossa $\mathbf{R}$. Kuitenkin jokaisella funktiolla on määrittelyvälejä, joihin rajoitettuna funktio on bijektio. Esimerkiksi $D\sin x = \cos x > 0$ kaikilla $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, joten sini on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Koska $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ja $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ sekä sini on derivoituvana jatkuva, seuraa Bolzanon lauseesta, että sini saa välillä $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ kaikki arvot joukosta $[-1,1]$. Koska $|\sin x| \le 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, on todistettu, että sini on bijektio väliltä $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ välille $[-1,1]$. Vastaavalla tavalla voidaan perustella, että kosini on bijektio väliltä $[0,\pi]$ välille $[-1,1]$.

Määritelmä 5.1.14 Bijektion $\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ käänteisfunktiota sanotaan *arkussinin päähaaraksi* tai lyhyesti *arkussiniksi* ja sille käytetään merkintää $\overline{\text{arc}}\,\sin$. Vastaavasti bijektion $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ käänteisfunktiota sanotaan *arkuskosinin päähaaraksi* tai lyhyesti *arkuskosiniksi* ja sille käytetään merkintää $\overline{\text{arc}}\,\cos$.

Tehtävä Tutki, millä arvoilla x, y, u, v pätee

$$\sin(\overline{\text{arc}}\,\sin x) = x, \quad \overline{\text{arc}}\,\sin(\sin y) = y, \quad \cos(\overline{\text{arc}}\,\cos u) = u, \quad \overline{\text{arc}}\,\cos(\cos v) = v?$$

Esimerkki 5.1.15 (a) Määrätään $\overline{\text{arc}}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ja $\overline{\text{arc}}\,\cos(-\frac{1}{2})$. Käänteisfunktion määritelmän nojalla

$$\overline{\text{arc}}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = y \iff \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Koska $y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, on $y = \frac{\pi}{4}$. Siis $\overline{\text{arc}}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$. Vastaavasti

$$\overline{\text{arc}}\,\cos(-\frac{1}{2}) = y \iff \cos y = -\frac{1}{2}.$$

Koska $y \in [0,\pi]$, on $y = \frac{2}{3}\pi$. Siis $\overline{\text{arc}}\,\cos(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$. Tähän tapaan tietyt arkussinin ja arkuskosinin tarkat arvot voidaan päätellä. Useimpien arvojen kohdalla on kuitenkin tyydyttävä taskulaskimen tai tietokoneen antamaan likiarvoon.

(b) Mitä on $y := \cos(\overline{\text{arc}}\,\sin x)$, kun $x \in [-1,1]$? Neliösummakaavan mukaan

$$\sin^2(\overline{\text{arc}}\,\sin x) + \cos^2(\overline{\text{arc}}\,\sin x) = 1,$$

joten

$$y = \pm\sqrt{1-\sin^2(\overline{\text{arc}}\,\sin x)} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Koska $\overline{\text{arc}}\,\sin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, on $y \ge 0$. Siispä miinus-merkki ei kelpaa eli pätee

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Vastaavasti todetaan (harjoitustehtävä), että

$$\sin(\overline{\text{arc}}\,\cos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1.$$

Erityisesti

$$\cos(\overline{\text{arc}}\,\sin x) = \sin(\overline{\text{arc}}\,\cos x), \quad -1 \le x \le 1.$$

(c) Ratkaistaan yhtälö

$$\overline{\mathrm{arc}}\sin x = 2\overline{\mathrm{arc}}\cos x. \tag{5}$$

Ottamalla yhtälöstä (5) sinit puolittain ja käyttämällä kaksinkertaisen sinin kaavaa saadaan

$$\sin(\overline{\mathrm{arc}}\sin x) = \sin(2\overline{\mathrm{arc}}\cos x) = 2\sin(\overline{\mathrm{arc}}\cos x)\cos(\overline{\mathrm{arc}}\cos x) = 2x\sin(\overline{\mathrm{arc}}\cos x).$$

Kohdan (b) nojalla päädytään yhtälöön

$$x = 2x\sqrt{1-x^2} \iff x(1-2\sqrt{1-x^2}) = 0,$$

jonka ratkaisut ovat $x = 0$ tai $1 - x^2 = \frac{1}{4}$ eli $x = 0$ tai $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Koska alkuperäisen yhtälön vasen puoli on välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja oikea puoli välillä $[0, 2\pi]$ ja sini ei ole injektio välillä $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, on tulos tarkistettava:

1) Kun $x = 0$, niin

$$\overline{\mathrm{arc}}\sin 0 = 2\overline{\mathrm{arc}}\cos 0 \iff 0 = 2\cdot\frac{\pi}{2},$$

mikä ei päde.

2) Kun $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, niin

$$\overline{\mathrm{arc}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\overline{\mathrm{arc}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) \iff \frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\pi}{6},$$

mikä pätee.

3) Kun $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, niin

$$\overline{\mathrm{arc}}\sin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\overline{\mathrm{arc}}\cos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \iff -\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{5\pi}{6},$$

mikä ei päde.

Siis yhtälön (5) ratkaisu on $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Määritelmä 5.1.16 Bijektion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ käänteisfunktiota sanotaan *arkustangentin päähaaraksi* tai lyhyesti *arkustangentiksi* ja sille käytetään merkintää $\overline{\mathrm{arc}}\tan$. Vastaavasti bijektion $\cot :]0, \pi[\to \mathbf{R}$ käänteisfunktiota sanotaan *arkuskotangentin päähaaraksi* tai lyhyesti *arkuskotangentiksi* ja sille käytetään merkintää $\overline{\mathrm{arc}}\cot$.

Trigonometrisille funktioille löytyy luonnollisesti muitakin (maksimissaan) π:n pituisia määrittelyvälejä, joilla funktiot ovat bijektioita. Rajoitumme kuitenkin tarkastelemaan ainoastaan päähaaroja, koska muiden haarojen tarkastelu ei tuo olennaista lisäarvoa teoriaan. Arkusfunktioiden derivoimista varten otetaan käyttöön käänteisfunktion derivoimista koskeva kaava, jonka todistus löytyy kirjasta Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1, ss. 116–117:

Lause 5.1.17 Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteen x_0 ympäristössä $B(x_0, r)$ ja joko $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in B(x_0, r)$ tai $f'(x_0) < 0$ kaikilla $x \in B(x_0, r)$. Tällöin funktion f käänteisfunktio f^{-1} on määritelty eräässä pisteen $f(x_0)$ ympäristössä, käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $f(x_0)$ ja

$$Df^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{6}$$

Huomautus Derivoimiskaava (6) on helppo johtaa yhdistetyn funktion derivoimiskaavalla kirjoittamalla $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, ks. Huomautus 4.1.11 (d).

Lauseen 5.1.17 ja trigonometristen funktioiden derivoimiskaavat yhdistämällä saadaan seuraavat arkusfunktioiden derivoimiskaavat:

Lause 5.1.18 (Arkusfunktioiden derivoimiskaavat)

(a) $D\overline{\text{arc}}\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ kaikilla $-1 < x < 1$,

(b) $D\overline{\text{arc}}\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ kaikilla $-1 < x < 1$,

(c) $D\overline{\text{arc}}\tan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$,

(d) $D\overline{\text{arc}}\cot x = -\dfrac{1}{1+x^2}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Todistetaan malliksi kaavat (a) ja (c). Kohdan (a) toteamiseksi merkitään $f(u) = \sin u$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tällöin $f'(u) = \cos u > 0$, kun $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Olkoon $x \in]-1, 1[$. Lauseen 5.1.17 nojalla

$$D\overline{\text{arc}}\sin x = D\overline{\text{arc}}\sin f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\overline{\text{arc}}\sin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

sillä $\overline{\text{arc}}\sin x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Kohdan (c) todistamiseksi merkitään $g(u) = \tan u$, $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Määrittelyvälillä $g'(u) = 1 + \tan^2 u > 0$, joten Lauseen 5.1.17 nojalla

$$D\overline{\text{arc}}\tan x = D\overline{\text{arc}}\sin g(g^{-1}(x)) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\overline{\text{arc}}\tan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Kohdat (b) ja (d) voidaan todistaa vastaavaan tapaan. □

Esimerkki 5.1.19 (a) Esimerkiksi

$$D\overline{\text{arc}}\sin(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad |x| < 1.$$

(b) Kotangentin määrittelyjoukossa pätee

$$D\overline{\text{arc}}\tan(\cot x) = \frac{1}{1+\cot^2 x} \cdot -\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot -\frac{1}{\sin^2 x} = -1.$$

Näin ollen välttämättä

$$\overline{\text{arc}}\tan(\cot x) = -x + C$$

jollekin vakiolle $C \in \mathbf{R}$. Sijoittamalla esimerkiksi $x = \frac{\pi}{2}$ saadaan

$$\overline{\text{arc}}\tan(\cot\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + C \iff 0 = \overline{\text{arc}}\tan 0 = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Siis $C = \frac{\pi}{2}$ ja olemme todistaneet kaavan

$$\overline{\text{arc}}\tan(\cot x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

5.2 Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi

Potenssifunktio

Luvun $x \in \mathbf{R}$ *positiiviset kokonaislukupotenssit* x^n määritellään induktiivisesti asettamalla $x^1 = x$ ja $x^{n+1} = x^n \cdot x$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Luvun $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *nollapotenssi* määritellään asettamalla $x^0 := 1$ ja *negatiiviset kokonaislukupotenssit* yhtälöllä

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

kun $x \neq 0$ ja $n \in \mathbf{N}$. Nyt induktiolla voidaan osoittaa, että

$$x^{m+n} = x^m x^n \quad \text{ja} \quad (x^m)^n = x^{m \cdot n} \tag{7}$$

kaikille $m, n \in \mathbf{Z}$ jos $x \neq 0$. Tämä todistetaan yleisesti kaikissa ryhmästruktuureissa algebran kurssilla. Jos $x = 0$, kaavat (7) pätevät triviaalisti positiivisille potensseille $m, n \in \mathbf{N}$.

Olkoon seuraavaksi $x \geq 0$. Esimerkissä 2.4.15 määrittelimme juurifunktion

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

potenssifunktion $x \mapsto x^n$ käänteisfunktiona kaikilla $x \geq 0$. Potenssifunktion käsite laajennetaan rationaalipotensseille yhdistettynä funktiona

$$x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{x})^m$$

kaikilla $x > 0$, $m \in \mathbf{Z}$ ja $n \in \mathbf{N}$. Potenssi- ja juurifunktio voidaan yhdistää kummin päin hyvänsä tuloksen muuttumatta, sillä

$$((\sqrt[n]{x})^m)^n = (\sqrt[n]{x})^{mn} = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m$$

ja ottamalla n:s juuri puolittain saadaan

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}.$$

Annetuista määritelmistä lähtien voidaan todistaa seuraavat potenssikaavat (sivuutamme todistukset, jotka ovat monivaiheisina työläitä vaikkakin rutiininomaisia):

Lemma 5.2.1 Kaikilla $x > 0$, $y > 0$ ja $p, q \in \mathbf{Q}$ pätee

(a) $x^{p+q} = x^p x^q$,

(b) $(x^p)^q = x^{pq}$,

(c) $(xy)^p = x^p y^p$,

(d) $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$.

Aiemmin on todettu, että derivoimiskaava $Dx^m = mx^{m-1}$ pätee kaikilla $m \in \mathbf{Z}$ jos $x \neq 0$. Nyt voidaan todistaa, että vastaava derivoimissääntö pätee yleisesti rationaalipotensseille positiivisten reaalilukujen joukossa.

Lause 5.2.2 Olkoon $p \in \mathbf{Q}$. Tällöin

$$Dx^p = px^{p-1}$$

kaikilla $x > 0$.

Todistus. Käänteisfunktion derivoimissäännöstä seuraa, että väite pätee tapauksessa $p = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ (harjoitustehtävä). Jos $p \in \mathbf{Q}$ on mielivaltainen, niin $p = \frac{m}{n}$, missä $m \in \mathbf{Z}$ ja $n \in \mathbf{N}$. Yhdistetyn funktion derivoimiskaavalla

$$D(x^p) = D(x^{\frac{m}{n}}) = D((x^{\frac{1}{n}})^m) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$$

□

Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktion eksakti määrittely ja perusominaisuuksien todistaminen on varsin monivaiheinen ja työläs tehtävä erityisesti siinä tapauksessa, että sarjateoriaan perustuva määrittely ei ole käytettävissä. Lähtökohtanamme on potenssin laajentamiseen perustuva määritelmä, mutta rajankäyntiin (supremum) liittyvät tarkastelut jätetään systemaattisesti väliin senkin vuoksi että potenssisarjojen käyttö perusteluissa on kätevämpi. Puuttuvat todistukset löytyvät Myrbergin kirjasta.

Esimerkki 5.2.3 Tarkastellaan lukujonoa

$$x_n := (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Pidetään tunnettuna, että sekä lukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ että lukujono $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$y_n := (1 - \frac{1}{n})^n,$$

ovat molemmat kasvavia. Nämä väitteet voidaan todistaa esimerkiksi ns. Bernoullin epäyhtälön avulla, mutta todistus on työläs ja tässä sivuutetaan, ks. Myrberg, ss. 45–46. Jonon $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ viisi ensimmäistä termiä ovat

$$2,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.44,\ 2.49.$$

Jonon $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ viisi ensimmäistä termiä ovat

$$0,\ 0.25,\ 0.30,\ 0.32,\ 0.33.$$

Koska

$$(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n^2} < 1,$$

niin

$$1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}, \quad n > 1.$$

Siis
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}, \quad n > 1.$$
Koska jono $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava, niin kaikilla $n > 1$ pätee
$$(1+\frac{1}{n})^n < \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$$
Siis jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on myös ylhäältä rajoitettu ja Lauseen 1.2.9 nojalla jonolla $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on äärellinen raja-arvo
$$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$
Raja-arvoa $e \approx 2.718$ sanotaan *Neperin luvuksi.*

Jos $p \in \mathbf{Q}$, niin potenssi e^p on määritelty edellä esitetyn perusteella. Joukossa $\mathbf{Q}$ määritelty eksponenttifunktio laajennetaan joukkoon $\mathbf{R}$ supremumin käsitteen avulla seuraavasti:

Määritelmä 5.2.4 Jos $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, asetetaan
$$e^x = \sup\{\, e^y \mid y \in \mathbf{Q},\ y < x\,\}.$$

Määritelmässä 5.2.4 äärellisen supremumin olemassaolon takaamiseksi on perusteltava, miksi joukko
$$A_x := \{\, e^y \mid y \in \mathbf{Q},\ y < x\,\}$$
on ylhäältä rajoitettu, ks. täydellisyysaksioma luvussa 1. Ideana on, että ensin todistetaan seuraavat rationaalisen eksponenttifunktion ominaisuudet:

(i) Jos $p \in \mathbf{Q}$ ja $p > 0$, niin $e^p > 1$,

(ii) Jos $p, q \in \mathbf{Q}$ ja $p < q$, niin $e^p < e^q$ (e^p on joukossa $\mathbf{Q}$ aidosti kasvava),

Perustellaan ehdot (i) ja (ii):

(i). Olkoon $p = \frac{m}{n} > 0$, jolloin $m, n \in \mathbf{N}$. Koska $e > 1$, juurifunktion aidon kasvavuuden nojalla
$$e^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} = 1.$$
Edelleen potenssifunktion $x \mapsto x^m$ aidon kasvavuuden nojalla
$$e^{\frac{m}{n}} = (e^{\frac{1}{n}})^m > 1^m = 1.$$

(ii). Olkoot $p, q \in \mathbf{Q}$, $p < q$. Koska $q - p > 0$, kohdan (i) nojalla $e^{q-p} > 1$ ja Lemman 5.2.1 nojalla
$$e^q = e^{p+(q-p)} = e^p e^{q-p} > e^p.$$

Perustellaan nyt, miksi joukko A_x on ylhäältä rajoitettu jos $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Olkoon $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Tällöin Lauseen 1.1.5 nojalla on olemassa $z \in \mathbf{Q}$, jolle $x < z$. Jos $y \in \mathbf{Q}$ ja $y < x$, niin $y < z$ ja kasvavuusehdon (ii) nojalla $e^y < e^z$. Siis e^z on eräs joukon A_x yläraja.

Huomautus 5.2.5 Kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee $e^x > 0$. Tämä on selvää supremumin määritelmän nojalla, jos päätellään että $e^p > 0$ kaikilla $p \in \mathbf{Q}$. Mutta jos $p = \frac{m}{n}$, missä $m \in \mathbf{Z}$ ja $n \in \mathbf{N}$, niin
$$e^p = (e^{\frac{1}{n}})^m > 0$$
sillä $e^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} = 1$ juurifunktion aidon kasvavuuden nojalla.

Määritelmästä 5.2.4 lähtien voidaan johtaa seuraavan lauseen keskeiset eksponenttifunktion ominaisuudet, ks. Myrberg, ss. 144–149. Mainittakoon myös, että eksponenttifunktiolla on potenssisarjaesitys

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Koska seuraavan lauseen tulokset ovat hankalia todistaa ilman sarjateoriaa, sivuutamme todistukset tässä.

Lause 5.2.6 Eksponenttifunktiolle $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\exp(x) := e^x$, pätee

(i) $e^{x+y} = e^x e^y$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$,

(ii) $De^x = e^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Seuraus 5.2.7 Eksponenttifunktiolle pätee

(i) exp on jatkuva joukossa $\mathbf{R}$,

(ii) exp on aidosti kasvava joukossa $\mathbf{R}$,

(iii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) ovat Lauseen 5.2.6 (ii) nojalla selviä. Kohta (iii) pätee, koska

$$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x} \iff \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

□

Esimerkki 5.2.8 (a) Raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

saadaan L'Hospitalin lauseesta tai huomaamalla että kyseessä on origoon liittyvän erotusosamäärän raja-arvo.

(b) Tietyt epäyhtälöt voidaan kätevästi todistaa ääriarvo-ongelman ratkaisuna. Osoitetaan esimerkiksi, että kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee

$$e^x \geq x + 1. \tag{8}$$

Merkitään $f(x) = e^x - x - 1$. Riittää osoittaa, että funktion f pienin arvo joukossa $\mathbf{R}$ on ei-negatiivinen. Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = e^x - 1,$$

joten $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ kun $x < 0$ ja $f'(x) > 0$ kun $x > 0$. Näin ollen funktio f on vähenevä välillä $]-\infty, 0[$, kasvava välillä $]0, +\infty[$ ja pisteessä $x = 0$ funktiolla f on lokaali minimi, joka samalla on pienin arvo joukossa $\mathbf{R}$. Mutta $f(0) = e^0 - 1 = 0$, joten väite seuraa.

(c) Kohdan (b) epäyhtälön avulla on helppo todistaa, että

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0. \tag{9}$$

Väitteen (9) todistamiseksi olkoon $0 < \varepsilon < 1$ ja olkoon $x < 0$. Kohdan (b) epäyhtälön nojalla

$$0 < e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x} < \varepsilon$$

kun

$$1 - x > \frac{1}{\varepsilon} \iff -x > -1 + \frac{1}{\varepsilon} \iff x < 1 - \frac{1}{\varepsilon} =: m.$$

Siis: Jos $x < m$, niin $|e^x - 0| < \varepsilon$ eli (9) pätee.

Luonnollinen logaritmi

Edellä todettiin, että eksponenttifunktio exp on aidosti kasvava joukossa $\mathbf{R}$. Näin ollen exp on injektio joukossa $\mathbf{R}$. Toisaalta epäyhtälöstä (8) ja raja-arvoväitteestä (9) seuraa Bolzanon lauseen avulla, että $\exp(\mathbf{R}) =]0, \infty[$. Siis exp on bijektio joukosta $\mathbf{R}$ joukkoon $]0, +\infty[$.

Funktion exp käänteisfunktiota kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*. Tälle käytetään merkintöjä $\log :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ ja $\ln :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$. Logaritmin määritelmän nojalla

$$e^{\log x} = x, \quad x > 0,$$

ja

$$\log e^x = x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lause 5.2.9 Jos $x, y > 0$, niin

(i) $\log(xy) = \log x + \log y$,

(ii) $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$,

(iii) $\log(\frac{1}{x}) = \log(x^{-1}) = -\log x$,

(iv) $\log x^a = a \log x$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$.

Todistus. (i) Eksponentin yhteenlaskukaavan nojalla

$$xy = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = e^{\log x + \log y}.$$

Ottamalla logaritmit puolittain saadaan

$$\log xy = \log e^{\log x + \log y} = \log x + \log y.$$

Kohta (ii) todetaan vastaavasti ja kohta (iii) on kohdan (ii) erikoistapaus. Kohta (iv) perustellaan yleisen eksponenttifunktion yhteydessä. $\square$

Logaritmin derivoimiskaava johdetaan käänteisfunktion derivoimissäännön avulla:

Lause 5.2.10 Kaikilla $x \neq 0$ pätee

$$D \log |x| = \frac{1}{x}.$$

Todistus. Olkoon $x > 0$ ja merkitään $f(u) = e^u$. Nyt $f'(u) = e^u > 0$ kaikilla $u \in B(x, 1)$, joten Lauseen 5.1.17 nojalla

$$D \log x = (f^{-1})'(f(f^{-1}(x))) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Arvoilla $x < 0$ pätee $\log |x| = \log(-x)$, joten alkuosan ja yhdistetyn funktion derivoimiskaavan nojalla

$$D \log |x| = D \log(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

□

Esimerkki 5.2.11 (a) Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi ovat siis aidosti kasvavia määrittelyjoukoissaan. Tätä käytetään hyväksi epäyhtälöitä ratkaistaessa. Ratkaistaan esimerkiksi epäyhtälö

$$e^{2x} + 2e^x > 2.$$

On siis ratkaistava epäyhtälö

$$(e^x)^2 + 2e^x - 2 > 0$$

Merkitään $y = e^x$, jolloin epäyhtälö saa muodon

$$y^2 + 2y - 2 > 0.$$

Tämän ratkaisuiksi saadaan $y < -1 - \sqrt{3}$ tai $y > -1 + \sqrt{3}$. Siis ratkaisut ovat

$$e^x < -1 - \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad e^x > -1 + \sqrt{3}.$$

Vasemmanpuoleisella epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun taas oikeanpuoleisen epäyhtälön ratkaisut saadaan ottamalla logaritmit puolittain (jolloin epäyhtälö aidon kasvavuuden nojalla ekvivalentisti säilyy)

$$e^x > -1 + \sqrt{3} \iff \log e^x > \log(\sqrt{3} - 1) \iff x > \log(\sqrt{3} - 1) \approx -0.312.$$

(b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$\log(x + 1) - 2 \log(x - 1) < 0.$$

Molemmat logaritmit ovat määriteltyjä, kun $x > 1$. Logaritmin laskusääntöjen nojalla epäyhtälö voidaan ekvivalentisti kirjoittaa muodossa

$$\log \frac{x + 1}{(x - 1)^2} < 0.$$

Ottamalla eksponenttifunktio puolittain epäyhtälö saadaan ekvivalentisti muotoon

$$\frac{x + 1}{(x - 1)^2} < 1.$$

Arvoilla $x > 1$ tämä on ekvivalentti epäyhtälön

$$x + 1 < (x-1)^2 \iff x + 1 < x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 3x < 0$$

kanssa. Viimeisen epäyhtälön ratkaisujoukoksi saadaan $x < 0$ tai $x > 3$. Ehto $x > 1$ huomioon ottaen ratkaisujoukoksi saadaan $x > 3$.

(c) Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi esiintyvät usein sovellutuksissa mm. sen vuoksi, että useiden käytännön ongelmiin liittyvien differentiaaliyhtälöiden ratkaisut ovat ilmaistavissa eksponenttifunktion avulla. Olkoon esimerkiksi $f(t)$ annetun radioaktiivisen aineen hiukkasten määrä ajanhetkellä $t \geq 0$. Kokeellisesti on todennettu, että hiukkasten lukumäärän muutos on kullakin ajanhetkellä verrannollinen hiukkasten lukumäärään. Toisin sanoen f noudattaa yhtälöä

$$f'(t) = -kf(t),$$

missä $k > 0$ on kullekin radioaktiiviselle aineelle ominainen vakio. Määrätään funktion f lauseke. On luonnollista olettaa, että tarkasteltavalla ajanjaksolla $f(t) > 0$, joten saadaan

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -k.$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$\log f(t) = -kt + C, \quad C \in \mathbf{R},$$

ja ottamalla eksponenttifunktiot puolittain saadaan

$$f(t) = e^{\log f(t)} = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^{C}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Sijoittamalla tähän $t = 0$ saadaan $f(0) = e^{-k\cdot 0}e^C = e^C$, joten ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu

$$f(t) = f(0)e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

Tähän liittyviä esimerkkejä löytyy runsaasti kirjasta Thomas: Calculus, ss. 488–498.

Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika T tarkoittaa aikaa, jonka kuluessa radioaktiivisia hiukkasia on jäljellä puolet alkuperäisestä määrästä. Olennaista on, että puoliintumisaika ei riipu arvosta $f(0)$. Nimittäin T on yhtälön $f(t) = \frac{f(0)}{2}$ ratkaisu eli

$$f(0)e^{-kT} = \frac{f(0)}{2} \iff e^{-kT} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu löydetään ottamalla luonnollinen logaritmi puolittain. Puoliintumisajaksi saadaan

$$\log\frac{1}{2} = \log e^{-kT} \iff -\log 2 = \log\frac{1}{2} = -kT \iff T = \frac{\log 2}{k}$$

eli puoliintumisaika riippuu vain vakiosta $k > 0$.

Eksponentti- ja logaritmifunktioiden asymptoottisten ominaisuuksien esittäminen vaatii seuraavan raja-arvon määritelmän laajennuksen:

Määritelmä 5.2.12 Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Funktio $f\ :]a, +\infty[\to \mathbf{R}$ *kasvaa rajatta* pisteessä $+\infty$, merkitään $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, jos jokaista lukua $\alpha > 0$ vastaa luku $M > 0$ siten, että

$$x > M \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

Vastaavasti funktio $f\ :]-\infty, a[\to \mathbf{R}$ *kasvaa rajatta* pisteessä $-\infty$, merkitään $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, jos jokaista lukua $\alpha > 0$ vastaa luku $m < 0$ siten, että

$$x < m \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

Vastaavasti voidaan määritellä milloin funktio vähenee rajatta pisteissä $+\infty$ ja $-\infty$, mutta emme tarvitse näitä käsitteitä.

Huomautus 5.2.13 Eksponenttifunktio kasvaa rajatta pisteessä $+\infty$ eli

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty. \tag{10}$$

Tämä voidaan todistaa helposti epäyhtälön (8) avulla. Olkoon $\alpha > 1$. Tällöin

$$e^x \geq x + 1 > \alpha \quad \text{jos} \quad x > \alpha - 1 =: M,$$

mistä väite seuraa. Itseasiassa eksponenttifunktio kasvaa vauhdikkaammin kuin mikään polynomi. Tämä ilmaistaan raja-arvolla

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \tag{11}$$

missä $n \in \mathbf{N}$ on mielivaltainen annettu luku. Väite (11) voidaan kätevästi perustella potenssisarjamääritelmästä, sillä arvoilla $x > 0$ pätee

$$e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

mistä saadaan arvio

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{1}{(n+1)!} x, \quad x > 0.$$

Tämän avulla vasemmanpuoleinen raja-arvoväite on helppo todeta, vrt. väitteen (10) todistus.

Myös funktio log kasvaa rajatta pisteessä $+\infty$ vaikkakin sen kasvuvauhti on hyvin hidasta.

5.3 Yleiset eksponentti- ja logaritmifunktiot

Määritelmä 5.3.1 Olkoon $a > 0$, $a \neq 1$. Tällöin *a-kantainen eksponenttifunktio* määritellään irrationaaliluvuille $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ asettamalla

(i) $a^x = \sup\{\, a^y \mid y \in \mathbf{Q},\ y < x \,\}$ kun $a > 1$,

(ii) $a^x = \sup\{\, a^y \mid y \in \mathbf{Q},\ x < y \,\}$ kun $a < 1$.

Määrittelyn takana on se, että tapauksessa (i) joukossa $\mathbf{Q}$ määritelty funktio $x \mapsto a^x$ on aidosti kasvava ja tapauksessa (ii) aidosti vähenevä.

Huomautus Koska $a^p > 0$ kaikilla $p \in \mathbf{Q}$, niin kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee $a^x > 0$, vrt. Huomautus 5.2.5.

Yleinen eksponenttifunktio voidaan ilmaista funktioiden exp ja log avulla seuraavasti:

Lause 5.3.2 Olkoon $a > 0$. Tällöin

$$a^x = e^{x \log a}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Esitämme todistuksen idean menemättä kaikkiin yksityiskohtiin. Ensinnäkin tulee todeta, että

$$\log a^p = p \log a \tag{12}$$

kaikilla $p \in \mathbf{Q}$. Tämä nähdään suoraviivaisella päättelyllä vaihe vaiheelta, ks. Myrberg, ss. 154–155. Yhtälöstä (12) seuraa, että

$$a^p = e^{\log a^p} = e^{p \log a}$$

kaikilla $p \in \mathbf{Q}$. Olkoon $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ja oletetaan aluksi, että $a > 1$. Funktio $y \mapsto e^{y \log a}$ on joukossa $\mathbf{R}$ aidosti kasvava ja jatkuva. Tästä on helppo päätellä, että

$$e^{x \log a} = \sup\{\, e^{y \log a} \mid y \in \mathbf{Q},\ y < x \,\}.$$

Määritelmän mukaan

$$a^x = \sup\{\, a^y \mid y \in \mathbf{Q},\ y < x \,\}.$$

Koska oikeanpuoleiset joukot, joiden yli supremum otetaan, ovat kummassakin tapauksessa samat, on $a^x = e^{x \log a}$. Tapaus $a < 1$ käsitellään vastaavasti, tällöin kuvaus $y \mapsto e^{y \log a}$ on aidosti vähenevä joukossa $\mathbf{R}$. □

Käyttäen Lausetta 5.3.2 mm. seuraavat yleisen eksponenttifunktion keskeiset ominaisuudet saadaan helposti johdettua.

Seuraus 5.3.3 Kaikilla $a > 0$ ja $x, y \in \mathbf{R}$ pätee

(i) $\log a^x = x \log a$,

(ii) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iv) $Da^x = a^x \log a$.

Todistus. (i) Ottamalla yhtälöstä $a^x = e^{x \log a}$ logaritmit puolittain saadaan

$$\log a^x = \log e^{x \log a} = x \log a.$$

Kohdat (ii), (iii) ja (iv) harjoitustehtäviä. □

Näin ollen funktio $x \mapsto a^x$ on aidosti kasvava tapauksessa $a > 1$ ja aidosti vähenevä tapauksessa $a < 1$. Kummassakin tapauksessa a-kantainen eksponenttifunktio voidaan todeta bijektioksi $\mathbf{R} \to]0, +\infty[$.

Funktion $x \mapsto a^x$ käänteisfunktio on *a-kantainen logaritmi* $\log_a x :]0, \infty[\to \mathbf{R}$. Tälle pätee

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Jos nimittäin $y = \log_a x$, niin $x = a^y$. Näin ollen

$$\log x = \log a^y = y \log a \quad \text{eli} \quad y = \frac{\log x}{\log a}.$$

Esimerkiksi derivaataksi saadaan

$$D\left(\log_a x\right) = \frac{1}{(\log a)x}.$$

Yleinen potenssifunktio

Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Lauseen 5.3.2 nojalla *potenssifunktio*

$$x \mapsto x^a$$

on ilmaistavissa yhtälöllä

$$x^a := e^{a \log x}, \quad x > 0.$$

Seurauksen 5.3.3 kohtia (i), (ii) ja (iii) voi luonnollisesti hyödyntää myös potenssifunktion tapauksessa. Derivaatalle saadaan "tuttu"kaava:

Lause 5.3.4 Jos $a \in \mathbf{R}$ ja $x > 0$, niin

$$Dx^a = ax^{a-1}.$$

Todistus. Olkoon $f(x) = x^a = e^{a \log x}$. Tällöin

$$f'(x) = e^{a \log x}\left(\frac{a}{x}\right) = x^a(\frac{a}{x}) = ax^{a-1}.$$

□

Esimerkki 5.3.5 Vastaavasti esimerkiksi funktion $x \mapsto x^x$, $x > 0$, tarkastelu palautuu eksponenttifunktioon ja logaritmiin kirjoittamalla

$$x^x = e^{x \log x}.$$

Derivaataksi saadaan

$$Dx^x = De^{x \log x} = e^{x \log x}(\log x + \frac{1}{x} \cdot x) = x^x(\log x + 1).$$

Koska

$$\log x + 1 = 0 \iff \log x = -1 \iff e^{\log x} = e^{-1} \iff x = \frac{1}{e}$$

ja logaritmi on aidosti kasvava, niin funktio $x \mapsto x^x$ on aidosti vähenevä välillä $]0, \frac{1}{e}]$ ja aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{e}, +\infty[$. Näin ollen

$$(e^{-1})^{e^{-1}} \approx 0.69$$

on pienin arvo joukossa $]0, +\infty[$.

5.4 Hyperboliset funktiot

Hyperboliset funktiot ovat tiettyjä eksponenttifunktioiden summia ja osamääriä. Trigonometrisiin funktioihin viittaavat nimitykset hyperbolinen sini etc. juontavat siitä, että hyperboliset funktiot käyttäytyvät monessa suhteessa kuten trigonometriset funktiot. Hyperboliset funktiot esiintyvät mm. tarkasteltaessa *hyperbolista etäisyyttä*, jolla puolestaan on tärkeä rooli geometrisessa funktioteoriassa. Mainittakoon myös, että *hyperbolisen geometrian* keksiminen 1800-luvulla mullisti suuresti matemaattista ajattelua.

Hyperbolinen sini sinh, *hyperbolinen kosini* cosh, *hyperbolinen tangentti tanh* ja *hyperbolinen kotangentti* coth määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} \sinh x : &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \\ \cosh x : &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \tanh x : &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \coth x : &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Hyperbolisille funktioille voidaan todistaa mm. ominaisuudet

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

ja

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}.$$

Derivaattakaavat vastaavat täysin trigonometristen funktioiden derivaattakaavoja, sillä

$$D \sinh x = \cosh x, \quad D \cosh x = \sinh x$$

sekä

$$D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad D \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan *areafunktioiksi*. Areafunktioille voidaan johtaa kaavat (määrittelyjoukot näkyvät alla):

$$\begin{aligned} \mathrm{arsinh} x &= \log(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbf{R}, \\ \mathrm{arcosh} x &= \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1, \\ \mathrm{artanh} x &= \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1, \\ \mathrm{arcoth} x &= \tfrac{1}{2} \log \tfrac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1. \end{aligned}$$