Analyyysi I

Sisältö

6 Kompleksiluvut **96**

6.1 Yhteen- ja kertolasku 96

6.2 Napakoordinaattiesitys 102

6 Kompleksiluvut

6.1 Yhteen- ja kertolasku

Karteesinen tulo $\mathbf{R}^2$ (euklidinen taso) on lukuparien joukko

$$\mathbf{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \}.$$

Kaksi lukuparia $(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ ja $(x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ ovat samat täsmälleen silloin kun molemmat vastinkoordinaatit yhtyvät eli kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$. Lukuparin sijasta puhutaan myös tason pisteestä (alkiosta) tai vaihtoehtoisesti 2-ulotteisesta vektorista. Emme kuitenkaan tässä käytä vektorimerkintää.

Joukossa $\mathbf{R}^2$ määritellään *yhteenlasku* yhtälöllä

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1}$$

ja *reaaliluvulla a kertominen* yhtälöllä

$$a(x, y) := (ax, ay)$$

kaikilla $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, a \in \mathbf{R}$. Näiden osalta puhutaan myös *vektoreiden yhteenlaskusta ja skalaarilla kertomisesta.*

Edelleen tasossa $\mathbf{R}^2$ voidaan määritellä *kertolasku* $\cdot$ yhtälöllä

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2) \tag{2}$$

kaikilla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$. Laskutoimitusta (2) kutsutaan *kompleksilukujen kertolaskuksi.*

Määritelmä 6.1.1 Karteesista tuloa $\mathbf{R}^2$ varustettuna yhteen- ja kertolaskuilla (1) ja (2) kutsutaan *kompleksiluvuiksi.*

Esimerkki 6.1.2 (a) Esimerkiksi

$$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6), \quad (1, 2) \cdot (3, 4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = (-5, 10).$$

(b) Olkoot $x, y, a \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$(a, 0) \cdot (x, y) = (ax - 0y, 0x + ay) = (ax, ay) = a(x, y).$$

Siis kompleksiluvulla $(a, 0)$ kertominen yhtyy skalaarilla a kertomiseen. Mitä saat tulosta $(0, a) \cdot (x, y)$?

(c) Edelleen

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0^2 - 1^2, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0).$$

Lemma 6.1.3 Kompleksiluvut muodostavat kunnan eli kolmikko $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ toteuttaa luvun 1 aksiomat (A1)–(A9).

Todistus. Täydellisyyden vuoksi käymme aksiomat läpi, ainoastaan yhteenlaskun vaihdannaisuus ja liitännäisyys (aksiomat (A1) ja (A2)) sekä kertolaskun vaihdannaisuus (aksioma (A5)) sivuutetaan helppona. Tarkastellaan muita aksiomeja:

(A3). *Nolla-alkio* eli (*yhteenlaskun neutraalialkio*) on pari $(0,0)$, sillä kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$ pätee

$$(x,y) + (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y).$$

(A4). Kompleksiluvun (x,y) *vasta-alkio (vastavektori)* on luku $(-x,-y)$, sillä

$$(x,y) + (-x,-y) = (x-x, y-y) = (0,0).$$

(A6). Olkoot $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) &= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) \\ &= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df)) \\ &= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) \\ &= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e) \\ &= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf),\end{aligned}$$

joten tulos on sama riippumatta siitä kummalle puolelle sulut asetetaan.

(A7). Olkoot $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\cdot(c+e, d+f) \\ &= (a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)) \\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}((a,b)\cdot(c,d))+((a,b)\cdot(e,f)) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(ae-bf, af+be) \\ &= ((ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be).\end{aligned}$$

Jälleen tulos on sama kummallakin tavalla laskettuna.

(A8). *Ykkösalkio* eli (*kertolaskun neutraalialkio*) on pari $(1,0)$, sillä kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$ pätee

$$(x,y)\cdot(1,0) = (x\cdot 1 - y\cdot 0, y\cdot 1 + x\cdot 0) = (x,y).$$

(A9). Olkoon $(x,y) \neq (0,0)$, jolloin $x^2+y^2 > 0$. Tällöin parin (x,y) käänteisalkio kertolaskun suhteen on $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$, sillä

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) &= \left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y(-\frac{y}{x^2+y^2}), x(-\frac{y}{x^2+y^2}) + y\frac{x}{x^2+y^2}\right) \\ &= (1,0).\end{aligned}$$

□

Huomautus Irlantilainen Hamilton (1833) esitti ensimmäisenä kompleksiluvut reaalilukupareina ja määritteli kertolaskun yllä olevaan tapaan. Myöhemmin Hamilton pyrki löytämään avaruudessa $\mathbf{R}^3$ kertolaskun $\cdot$, joka yhdessä vektorien yhteenlaskun $+$ kanssa tekee kolmikosta $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$ kunnan. Nykyään tiedetään, että tämä ei ole mahdollista avaruudessa $\mathbf{R}^n$, jos $n > 2$. Hamilton onnistui kuitenkin 1843 keksimään kvaterniot. Nämä ovat reaalilukunelikkoja (avaruuden $\mathbf{R}^4$ alkioita), joiden yhteen- ja kertolasku toteuttavat kertolaskun vaihdannaisuutta lukuun ottamatta muut kunta-aksiomat. Kvaternioiden keksimisellä oli suuri merkitys algebran kehitykselle.

Kompleksiluvun imaginääriesitys

Merkitään lyhyyden vuoksi $i := (0,1)$ ja $(x,0) = x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Lukua i kutsutaan *imaginääriyksiköksi*. Esimerkissä 6.1.2 todettiin, että

$$i^2 = -1.$$

Mielivaltainen kompleksiluku (x,y) voidaan esittää muodossa

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1)$$

eli lyhennettyä merkintää käyttäen

$$(x,y) = x + yi.$$

Tätä esitystä kutsutaan lukuparin (kompleksiluvun) *imaginääriesitykseksi*. Huomaa, että imaginääriesityksessa laskutoimituksina ovat kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku, mutta on käytetty lyhennettyä merkintää.

Esimerkki 6.1.4 Imaginääriesityksen avulla kompleksilukujen laskutoimituksia voidaan soveltaa muistelematta kertolaskun määritelmää kunhan muistetaan, että kunnan laskusäännöt ovat voimassa ja imaginääriyksikölle pätee $i^2 = -1$. Esimerkiksi

(a) Osittelulain nojalla

$$3(2+i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot i = 6 + 3i.$$

(b) Vastaavasti osittelulakia, vaihdannaisuutta ja liitännäisyyttä sekä tietoa $i^2 = -1$ hyödyntäen

$$3i(2+i) = (3i)2 + (3i)i = 6i + 3i^2 = 6i - 3 = -3 + 6i.$$

(c) Samoin perustein

$$-4i(2-2i)(2+2i) = -4i(2^2 + 2^2 i - 2^2 i - 2^2 i^2) = -4i(4 - 4i^2) = -4i(8) = -32i.$$

Tavallisesti imaginääriesityksen yhteydessä kompleksilukujen joukolle käytetään merkintää $\mathbf{C}$ ja kompleksiluvuille käytetään aakkosia z, w, u. Siis

$$\mathbf{C} = \{\, x + yi \mid x, y \in \mathbf{R} \,\}.$$

Jos $z = x + yi \in \mathbf{C}$, niin merkitään

- $z \in \mathbf{R}$, jos $y = 0$,
- $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, jos $y \neq 0$.

Ensimmäisessä tapauksessa lukua z sanotaan *reaaliseksi* ja jälkimmäisessä tapauksessa *imaginääriseksi*.

Määritelmä 6.1.5 Kompleksiluvussa $z = x + yi \in \mathbf{C}$ reaalilukua x sanotaan luvun z *reaaliosaksi*, merkitään $\operatorname{Re} z = x$, ja reaalilukua y sanotaan *imaginääriosaksi*, merkitään $\operatorname{Im} z = y$. Edelleen lukua
$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$
sanotaan luvun z *moduliksi* ja kompleksilukua $\overline{z} = x - iy$ sanotaan luvun z *konjugaatiksi* eli *liittoluvuksi*.

Esimerkki 6.1.6 (a) Lukujen $z = 3i(2+i) = -3+6i$ ja $w = -4i(2-2i)(2+2i) = -32i$ reaali- ja imaginääriosat ovat Esimerkin 6.1.4 laskujen nojalla
$$\operatorname{Re} z = -3, \quad \operatorname{Im} z = 6, \quad \operatorname{Re} w = 0, \quad \operatorname{Im} w = -32.$$
Modulit ovat
$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45}, \quad |w| = \sqrt{32^2 + 0^2} = 32$$
ja konjugaatit ovat
$$\overline{z} = -3 - 6i, \quad \overline{w} = 32i.$$
(b) Olkoot $z = a + bi$ ja $w = c + di$. Määrätään $\operatorname{Re} zw$ ja $\operatorname{Im} zw$. Nyt
$$\begin{aligned} zw &= (a+bi)(c+di) = a(c+di) + (bi)(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad+bc)i \end{aligned}$$
Siis $\operatorname{Re} zw = ac - bd$ ja $\operatorname{Im} zw = ad + bc$ eli reaali- ja imaginääriosa käyttäytyvät (tietenkin) määritelmän (2) mukaisesti. Eo. lasku on keino palauttaa mieleen kertolaskun määritelmä.

(c) Osoitetaan, että kaikilla $z, w \in \mathbf{C}$ pätee
$$(z+w)(z-w) = z^2 - w^2.$$
Tätä varten lukuja ei kannata esittää imaginääriesityksenä, vaan käyttäen kunnan laskusääntöjä saadaan
$$(z+w)(z-w) = z^2 + z(-w) + wz - w^2 = z^2 - w^2.$$
Mainittakoon, että binomikaava
$$(z+w)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} w^i$$
voidaan todistaa myös kompleksiluvuille.

(d) Osoitetaan, että kaikilla $z \in \mathbf{C}$ pätee
$$z\overline{z} = |z|^2.$$
Olkoon $z = x + iy$. Tällöin kohdan (c) nojalla
$$z\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

(e) Osoitetaan, että $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ kaikilla $z, w \in \mathbf{C}$. Merkitään $z = a + bi$ ja $w = c + di$. Tällöin $z + w = a + bi + c + di = (a+c) + (b+d)i$, joten
$$\overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i = a - bi + c - di = \overline{z} + \overline{w}.$$

Huomautus Jos $z = x + iy \neq 0$, niin *moduli* $|z|$ *ilmoittaa tason pisteen* (x, y) *etäisyyden origosta*. Konjugaatinotto puolestaan tarkoittaa *tason pisteen* (x, y) *peilausta* x*-akselin suhteen*. Tässä kuvauksessa $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Lemman 6.1.3 todistuksesta nähdään, että kompleksiluvun $z = x+iy \neq 0$ on käänteisluku z^{-1} on muotoa

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Kompleksilukujen jakolasku määritellään ehdolla

$$\frac{z}{w} := z \cdot w^{-1}$$

kaikilla $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan kuinka osamäärinä annettujen kompleksilukujen reaali- ja imaginääriosat saadaan selville.

Esimerkki 6.1.7 (a) Määrätään luvun $z = \dfrac{1}{2+i}$ reaali- ja imaginääriosat. Laventamalla nimittäjän liittoluvulla saadaan Esimerkin 6.1.6 kohdan (c) nojalla

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{2^2 - i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5},$$

joten $\operatorname{Re} z = \frac{2}{5}$ ja $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$.

(b) Vastaavasti

$$w = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{1^2 - i^2} = \frac{1}{2}(3 + i + 3i + i^2) = \frac{1}{2}(2 + 4i) = 1 + 2i.$$

Siis $\operatorname{Re} w = 1$ ja $\operatorname{Im} w = 2$.

Toisen ja kolmannen asteen reaalikertoiminen algebrallinen yhtälö

Pidetään tässä tunnettuna algebran peruslause: Kompleksimuuttujan algebrallisella yhtälöllä

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

missä $a_i, z \in \mathbf{C}$ ja $a_n \neq 0$, on aina täsmälleen n juurta, jos kertaluku otetaan huomioon. Esimerkiksi yhtälöllä

$$(z-1)^n = 0$$

on vain yksi n-kertainen juuri 1.

Esimerkki 6.1.8 (a) Tarkastellaan kompleksimuuttujan toisen asteen algebrallista yhtälöä

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Kokeillaan tuttua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Saadaan

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Merkitsemällä $-3 = 3i^2$ ja kirjoittamalla $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$ voidaan "olettaa", että ratkaisut ovat

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Tarkistetaan vastaus sijoittamalla. Saadaan

$$\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4}(1 + 3i^2 \mp 2i\sqrt{3} - 2 \pm 2i\sqrt{3} + 4) = 0.$$

Siis luvut $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ovat ratkaisuja eikä muita ratkaisuja ole olemassa algebran peruslauseen nojalla.

(b) Tarkastellaan yleisesti kompleksimuuttujan toisen asteen algebrallista yhtälöä

$$az^2 + bz + c = 0,$$

missä $a, b, c \in \mathbf{R}$ ja $b^2 - 4ac < 0$. Vastaavaan tapaan kuin edellä voidaan todeta, että kompleksiluvut

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ovat erilliset ratkaisut, eikä muita ratkaisuja ole olemassa analyysin peruslauseen mukaan. Tämä päättely paikkaa Lauseen 2.2.1 todistukseen jääneen aukon.

Esimerkki 6.1.9 Kuten luvussa 2 mainittiin, kolmannen asteen reaalikertoimisen yhtälön

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{4}$$

missä $p, q \in \mathbf{R}$, ratkaisut saadaan *Cardanon kaavoilla*

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_2 &= \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_3 &= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Reaalisten ratkaisujen lukumäärä riippuu diskriminantin $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ merkistä seuraavasti:

(1) Jos $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0$, niin z_1 on reaalinen ja z_2 sekä z_3 ovat imaginäärisiä toistensa liittolukuja.

(2) Jos $D = 0$, niin ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}}, \\
z_2 &= z_3 = -\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

(3) Jos $D < 0$, juuret z_1, z_2, z_3 ovat eri suuria ja reaalisia.

Kohtien (1) ja (2) väitteet todetaan jokseenkin helposti, väitteen (3) perusteleminen sivuutetaan tässä.

6.2 Napakoordinaattiesitys

Napakoordinaattiesityksellä tarkoitetaan tason pisteen (x, y) esitystä muodossa

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \end{cases}$$

missä $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ja φ on pisteen (x, y) *vaihekulma* eli kulma x-akselin pisteestä $(\sqrt{x^2+y^2}, 0)$ pisteeseen (x, y) vastapäivään. Tällöin arvoilla $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pätee

$$\varphi = \overline{\text{arc}}\,\tan\frac{y}{x}.$$

Kompleksiluku $z = x + iy \neq 0$ voidaan siis napakoordinaattiesityksen avulla esittää muodossa

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{5}$$

missä $r = |z|$ ja φ on luvun z vaihekulma.

Esimerkki 6.2.1 Määrätään luvun $z = 2 + i$ napakoordinaatit. Nyt

$$r = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}.$$

Toisaalta yleistämällä kosinin ja sinin määritelmää (eli luopumalla vaatimuksesta että tarkasteltavan ympyrän säde on 1) saadaan yhtälöt

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Jakamalla oikeanpuoleinen yhtälö vasemmanpuoleisella saadaan

$$\tan\varphi = \frac{1}{2}.$$

Kulmaksi φ saadaan $\varphi = \overline{\text{arc}}\,\tan\frac{1}{2} \approx 0.464$ radiaania eli asteina $360 \cdot \frac{\overline{\text{arc}}\,\tan\frac{1}{2}}{2\pi} \approx 26.6$.

Eulerin kaava

Saadaksemme tulkinnan kompleksilukujen kertolaskun geometriselle merkitykselle pidämme ilman perusteluja tunnettuna ns. Eulerin kaavan. Lähtökohtana on se, että eksponenttifunktio voidaan määritellä koko kompleksitasossa $\mathbf{C}$ potenssisarjana

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Eulerin kaava ilmaisee yksikköympyrän kehäpisteet kompleksisen eksponenttifunktion avulla:

Lause 6.2.2 (Eulerin kaava) Kaikilla $\varphi \in [0, 2\pi[$ pätee

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Huomautus Valitsemalla Eulerin kaavassa $\varphi = \pi$ saadaan yhtälö

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

joka sisältää viisi "tärkeintä"lukua (eikä juuri muuta) yhdessä kaavassa.

Yhdistämällä Eulerin kaava ja napakoordinaattiesitys (5) saadaan

$$z = re^{i\varphi}, \tag{6}$$

missä $r = |z|$ ja φ on luvun z vaihekulma.

Esimerkki 6.2.3 Määrätään kompleksiluvuille $z_1 = 2i$ ja $z_2 = -1 - i$ muotoa (6) olevat esitykset. Nyt $r_1 = 2$ ja $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ sekä $r_2 = \sqrt{2}$ ja $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$. Näin ollen

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Pitäen edelleen tunnettuna, että kompleksiselle eksponenttifunktiolle pätee laskusääntö

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, saadaan kompleksilukujen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$, tulolle esitys

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{7}$$

Siis:

- tulon $z_1 z_2$ moduli on modulien tulo $r_1 r_2$,
- tulon $z_1 z_2$ vaihekulma on vaihekulmien summa $\varphi_1 + \varphi_2$.

Esimerkki 6.2.4 Esimerkin 6.2.3 lukujen $z_1 = 2i$ ja $z_2 = -1 - i$ tulon esitys muotoa (6) on

$$z_1 z_2 = (2e^{\frac{\pi}{2}i})(\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}) = 2\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4})i} = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

Erityisesti kaavasta (7) saadaan luvun $z = re^{i\varphi}$ positiiviselle potensseille induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee

$$\begin{array}{rcl} z^2 & = & r^2 e^{(2\varphi)i}, \\ z^3 & = & z^2 z = (r^2 e^{(2\varphi)i})(re^{i\varphi}) = r^3 e^{(3\varphi)i}, \\ & \cdots & \\ z^n & = & r^n e^{(n\varphi)i}. \end{array}$$

Jos erityisesti $r = 1$ (z sijaitsee yksikköympyrän kehällä), saadaan Eulerin kaavan nojalla de Moivren kaava:

Lause 6.2.5 (de Moivren kaava) Kaikilla $\varphi \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{N}$ pätee

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Lauseesta 6.2.5 saadaan kätevästi laskettua moninkertaisten sinin ja kosinin kaavat:

Esimerkki 6.2.6 Määrätään $\sin 2x$ ja $\cos 2x$ de Moivren kaavalla. Koska

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x + i^2 \sin^2 x + 2i \sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x + (2 \sin x \cos x)i,$$

saadaan de Moivren kaavan nojalla yhtäsuuruus

$$\cos^2 x - \sin^2 x + (2 \sin x \cos x)i = \cos 2x + (\sin 2x)i.$$

Tässä välttämättä sekä reaali- että imaginääriosat yhtyvät, joten

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad \text{ja} \quad 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$