Analyyysi I

Visa Latvala

8. lokakuuta 2004

Sisältö

1 Reaaliluvut ja reaalilukujonot

1.1 Kertausta

Matemaattisessa analyysissä tutkitaan reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita. Useat päättelyt perustuvat reaalilukujen ominaisuuksiin. Siksi on luontevaa aloittaa kurssi tarkastelemalla lähemmin reaalilukujen joukkoa $\mathbf{R}$.

Lähdetään aluksi siitä, että keskeiset reaalilukujen laskusäännöt tunnetaan jo lukiomatematiikasta. Reaalilukujen määritelmään (ja tätä kautta laskusääntöjen perusteisiin) paneudutaan myöhemmin. Aluksi kerrataan epäyhtälöiden käsittelyä. Tunnetusti epäyhtälöön voidaan lisätä puolittain luku ja epäyhtälö voidaan kertoa puolittain positiivisella luvulla. *Positiivinen* tarkoittaa > 0. Jos epäyhtälö kerrotaan *negatiivisella* luvulla (luvulla < 0), epäyhtälö kääntyy toisinpäin.

Seuraava lemma perustellaan myöhemmin:

Lemma 1.1.1 Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$ siten, että $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Tällöin

(a) $x^2 < y^2$ jos ja vain jos $x < y$,

(b) $x^2 = y^2$ jos ja vain jos $x = y$.

Itseisarvo

Algebralliset päättelyt perustuvat tyypillisesti yhtälöihin. Analyysissä sen sijaan epäyhtälöt ovat olennaisia, sillä monet tärkeät asiat ilmaistaan epäyhtälöiden avulla. Esimerkiksi funktion raja-arvon määritelmä sisältää kaksi itseisarvoepäyhtälöä.

Määritelmä 1.1.2 Luvun $x \in \mathbf{R}$ itseisarvo $|x|$ määritellään asettamalla

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{kun} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Huomautus Siis $|x| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 1.1.3 (a) Minkälainen on funktion

$$f(x) = \Big| |x-1| - 2 \Big|$$

kuvaaja? Tätä varten kirjoitetaan funktio paloittain määriteltynä ilman itseisarvomerkkejä. Poistetaan ensin sisemmät itseisarvot kirjoittamalla

$$\Big| |x-1| - 2 \Big| = \begin{cases} |x-3|, & \text{kun} \quad x \geq 1 \\ |-x-1|, & \text{kun} \quad x \leq 1. \end{cases}$$

Oletetaan, että $x \geq 1$. Tällöin

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{kun} \quad x \geq 3 \\ -x+3, & \text{kun} \quad x \leq 3. \end{cases}$$

Oletetaan, että $x \leq 1$. Tällöin

$$|-x-1| = |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x \leq -1, \end{cases}$$

joten

$$\Big||x-1|-2\Big| = \begin{cases} -x-1, & \text{kun} \quad x \leq -1 \\ x+1, & \text{kun} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3, & \text{kun} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x-3, & \text{kun} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Tästä esityksestä kuvaaja on helppo hahmottaa.

(b) Osoitetaan, että

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \max\{x,y\}$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

Olkoon ensin $x \geq y$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = \max\{x,y\}.$$

Olkoon $y > x$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = \frac{1}{2} \cdot 2y = y = \max\{x,y\}.$$

Siis väite pätee.

Seuraavaan lauseeseen on koottu itseisarvon perusominaisuudet:

Lause 1.1.4 Kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$ pätee

(a) $|x| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$,

(b) $|x|^2 = x^2$,

(c) $|xy| = |x||y|$,

(d) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, jos $y \neq 0$,

(e) $|x| = |-x|$,

(f) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Kolmioepäyhtälö).

Todistus. Kohta (a) on ilmeinen ja kohdat (b), (e) seuraavat helposti itseisarvon määritelmää käyttäen. Muut kohdat on helpointa päätellä käyttämällä kohtaa (b) ja Lemmaa 1.1.1. Asiaa tarkastellaan harjoitustehtävissä. □

Kolmioepäyhtälön geometrinen tulkinta Nimitys kolmioepäyhtälö juontaa ehdon geometrisesta merkityksestä tason vektoreiden tapauksessa. Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat kaksi erisuuntaista tason vektoria, ne muodostavat yhdessä summavektorin $\overline{x} + \overline{y}$ kanssa kolmion. Tällöin kolmioepäyhtälö

$$|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$$

ilmaisee sen intuitiivisesti ilmeisen seikan, että kolmiossa kolmannen sivun pituus on korkeintaan yhtä suuri kuin kahden muun sivun pituuksien summa. Lauseen 1.1.4 tilanteessa ollaan siinä rajatapauksessa, jossa vektoreiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ päätepisteet sijaitsevat x-akselilla. Tällöin "kolmio"on litistynyt kasaan.

Esimerkki 1.1.5 (a) Ratkaistaan epäyhtälö $|\frac{x-1}{x+1}| < 1$. Voidaan korottaa toiseen ekvivalentisti (Lemma 1.1.1), joten epäyhtälö pätee täsmälleen silloin, kun

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1^2 = 1 \\ \iff \quad & \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1 \\ \iff \quad & (x-1)^2 < (x+1)^2 \\ \iff \quad & x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \\ \iff \quad & 4x > 0 \iff x > 0. \end{aligned}$$

Ratkaisu on siis $x > 0$.

(b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$x - 1 < |x + 1|.$$

Oletetaan ensin $x + 1 \geq 0$ eli $x \geq -1$. Silloin epäyhtälö saa muodon

$$x - 1 < x + 1 \iff -1 < 1,$$

mikä pätee x:n arvosta riippumatta. Siis arvot $x \geq -1$ kuuluvat ratkaisujoukkoon. Oletetaan, että $x + 1 < 0$ eli $x < -1$. Silloin epäyhtälö saa muodon

$$x - 1 < -x - 1 \iff 2x < 0 \iff x < 0,$$

mikä myös pätee x:n arvosta riippumatta. Näin ollen epäyhtälö toteutuu kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Neliöjuuri

Määritelmä 1.1.6 Olkoon $a \geq 0$. Luvun a *neliöjuurella* $\sqrt{a}$ tarkoitetaan yhtälön $x^2 = a$ ei-negatiivista ratkaisua.

Huomautus Se, että ratkaisu on aina olemassa ja yksikäsitteinen, perustellaan myöhemmin. Siis neliöjuuri on määritelmän mukaan aina *ei-negatiivinen* (≥ 0).

Esimerkki 1.1.7 Ratkaistaan epäyhtälö $\sqrt{x} > x^2$. Neliöjuuri on määritelty vain ei-negatiivisille luvuille, joten vaaditaan $x \geq 0$. Koska $x = 0$ ei ole epäyhtälön ratkaisu, ratkaisulle pätee välttämättä $x > 0$. Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, voidaan korottaa ekvivalentisti toiseen (Lemma 1.1.1). Saadaan

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} > x^2 \\ \iff \quad & x > x^4 \\ \iff \quad & x(1 - x^3) > 0 \\ \iff \quad & 1 - x^3 > 0 \\ \iff \quad & x^3 < 1. \end{aligned}$$

Tästä yhdessä ehdon $x > 0$ kanssa saadaan ratkaisujoukoksi $0 < x < 1$.

Toisen asteen epäyhtälö

Toisen asteen epäyhtälöiden ratkaiseminen perustuu siihen, että ratkaistaan ensin ko. toisen asteen polynomin nollakohdat.

Lause 1.1.8 (Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava) Olkoon $a \neq 0$ ja $b, c \in \mathbf{R}$. Tällöin yhtälön

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

ratkaisut saadaan kaavasta

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

(i) Jos diskriminantille pätee $D := b^2 - 4ac > 0$, niin yhtälöllä (1) on kaksi reaalista ratkaisua,

(ii) Jos $D = 0$, niin yhtälöllä (1) on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu,

(iii) Jos $D < 0$, niin yhtälöllä (1) ei ole reaalisia ratkaisuja.

Todistus. Lause perustellaan myöhemmin kompleksilukujen yhteydessä. □

Muistisääntö Toisen asteen epäyhtälöiden ratkaiseminen perustuu siihen, että polynomin

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli jos $a > 0$ ja alaspäin aukeava paraabeli jos $a < 0$. Toisen asteen epäyhtälön ratkaisun kannalta olennaista on P:n merkin käyttäytyminen. Tämä voidaan helposti perustella Bolzanon lauseen avulla (tarkastellaan myöhemmin).

Esimerkki 1.1.9 (a) Ratkaistaan epäyhtälö $P(x) = -x^2 + x + 4 > 0$. Nollakohdiksi saadaan ratkaisukaavalla

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

ja koska P on alaspäin aukeava paraabeli, P on positiivinen nollakohtien välissä. Siis ratkaisujoukko on $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

(b) Vastaavasti epäyhtälöllä $-x^2+x-4 > 0$ ei ole ratkaisuja, sillä yhtälön $-x^2+x-4 = 0$ diskriminantti on negatiivinen,

$$D = 1^2 - 4(-1)(-4) = -15,$$

ja kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli.

1.2 Polynomit ja rationaalifunktiot

Polynomi on alkeisfunktioista yksinkertaisin, koska kuvapiste saadaan lähtöpisteestä äärellisellä määrällä yhteen- ja kertolaskuoperaatioita. Polynomit ovat tärkeitä mm. siksi, että

(1) sovellutuksissa ongelmien ratkaisut ovat usein polynomien nollakohtia,

(2) polynomeilla voidaan approksimoida muita säännöllisiä funktiota.

Määritelmä 1.2.1 *Polynomi* on funktio $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

missä $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ovat vakioita *(polynomin kertomia)*. Jos $a_n \neq 0$ ja $a_i = 0$ kun $i > n$, niin $n =: \deg P \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ on *polynomin P aste*. *Nollapolynomi* on polynomi, jonka kaikki kertoimet ovat nollia.

Huomaa, ettemme ole määritelleet astetta nollapolynomille. Sovitaan merkinnästä $P \equiv 0$, jos P on nollapolynomi.

Esimerkki Lauseke

$$P(x) = \sqrt{7} x^5 - \pi x^2 + 1$$

määrittelee polynomin, jolle $\deg P = 5$.

Pyrimme perustelemaan, miksi yhtälöllä $P(x) = 0$ on korkeintaan $\deg P$ erisuurta reaalista ratkaisua. Tätä varten tarvitaan ensin useita aputuloksia.

Lemma 1.2.2 (Polynomien jakoyhtälö) Olkoot P ja Q polynomeja siten, että $\deg Q \neq 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteisesti määrätyt polynomit A ja R siten, että kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x) \quad \text{ja} \quad \deg R < \deg Q.$$

Lemman 1.2.2 polynomia R sanotaan *jakojäännökseksi*, polynomi P on *jaettava* ja polynomi Q on *jakaja*. Todistus sivuutetaan algebrallisena ja teknisenä, ks. esimerkiksi Myrberg: Algebra, s. 112.

Esimerkki 1.2.3 Käsin laskien A ja R löydetään jakokulman avulla.

(a) Olkoon

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{ja} \quad Q(x) = x^2 + 1.$$

Jakamalla jakokulmassa $x^3 + x^2 + x + 1$ polynomilla $x^2 + 1$ saadaan tulokseksi $x + 1$. Siis

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)$$

eli $A(x) = x + 1$ ja $R(x) = 0$.

(b) Olkoon

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1 \quad \text{ja} \quad Q(x) = x + 2.$$

Jakamalla jakokulmassa $x^3 + 3x^2 - x - 1$ polynomilla $x + 2$ saadaan $A(x) = x^2 + x - 3$ ja jakojäännökseksi $R(x) = 5$. Tarkastamalla todetaan, että tulos on oikein, sillä

$$Q(x)A(x) + R(x) = (x + 2)(x^2 + x - 3) + 5 = x^3 + 3x^2 - x - 1 = P(x).$$

Määritelmä 1.2.4 Reaaliluku x on polynomin P *nollakohta*, jos $P(x) = 0$.

Lemma 1.2.5 Olkoot P ja Q polynomeja siten, että kumpikaan ei ole nollapolynomi. Tällöin

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q.$$

Todistus. Jos $n = \deg P$ ja $m = \deg Q$, niin $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ ja $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$, missä $a_n \neq 0$ ja $b_m \neq 0$. Tällöin

$$P(x)Q(x) = a_n b_m x^{n+m} + \cdots + a_0 b_0,$$

mistä väite seuraa koska $a_n b_m \neq 0$. $\square$

Lemma 1.2.6 Jos polynomilla P on nollakohta x_0, niin P on muotoa

$$P(x) = (x - x_0)A(x),$$

missä A on polynomi, jolle $\deg A = \deg P - 1$.

Todistus. Kun polynomi P jaetaan polynomilla Q, $Q(x) = x - x_0$, saadaan jakoyhtälön nojalla esitys

$$P(x) = (x - x_0)A(x) + R(x), \tag{3}$$

missä $\deg R < \deg Q = 1$. Siis $\deg R = 0$ tai $R \equiv 0$. Joka tapauksessa R on vakio. Sijoittamalla $x = x_0$ esitykseen (3) saadaan

$$0 = P(x_0) = (x_0 - x_0)A(x_0) + R(x_0) = R(x_0).$$

Koska R on vakiopolynomi ja $R(x_0) = 0$, niin $R \equiv 0$. Ensimmäinen väite on siis todistettu. Polynomin A astetta koskeva väite seuraa helposti Lemmasta 1.2.5. $\square$

Lemma 1.2.7 Jos P on polynomi, jolle $n = \deg P \in \mathbf{N}$, ja jos $x_1, \ldots, x_n$ ovat erillisiä polynomin P nollakohtia, niin P on muotoa

$$P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

missä $a_n \neq 0$.

Todistus. Soveltamalla toistuvasti Lemmaa 1.2.6 saadaan

$$P(x) = (x - x_1)A_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)A_2(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)A_n(x),$$

missä $\deg A_1 = n - 1,\ \deg A_2 = n - 2, \ldots, \deg A_n = 0$. Erityisesti $A_n(x) = a_n$ jollekin $a_n \neq 0$. $\square$

Epäsuora todistus, versio I

Epäsuoran todistuksen idea on yksinkertaisimmallaan siinä, että implikaatio

$$A \Longrightarrow B \tag{4}$$

on loogisesti ekvivalentti implikaation

$$\neg B \Longrightarrow \neg A$$

kanssa.

Ensimmäisenä esimerkkinä epäsuorasta todistuksesta todistetaan:

Esimerkki 1.2.8 Jos $n \in \mathbf{Z}$ ja n^2 on parillinen, niin n on parillinen.

Todistus. Huomaa ensin, että luku n on parillinen, jos $n = 2k$ jollekin $k \in \mathbf{Z}$ ja pariton, jos $n = 2k' + 1$ jollekin $k' \in \mathbf{Z}$. Kokonaislukujen jakoyhtälö takaa että, mikään luku ei voi olla sekä parillinen että pariton ja että jokainen kokonaisluku on joko parillinen tai pariton.

Kyseessä on implikaatio $A \Longrightarrow B$, missä A on looginen lause ”$n \in \mathbf{Z}$ ja n^2 on parillinen”ja B on looginen lause ”$n \in \mathbf{Z}$ ja n on parillinen”. Todistetaan implikaatio epäsuorasti eli oletetaan $\neg B$ voimassa olevaksi (tehdään *antiteesi*).

Antiteesi: $n \in \mathbf{Z}$ ja n on pariton. Tällöin $n = 2k + 1$ jollekin $k \in \mathbf{Z}$, mistä seuraa että

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Näin ollen n^2 on parillinen eli $\neg A$ pätee. (Sanotaan, että on päädytty *ristiriitaan* oletuksen A kanssa). $\square$

Epäsuora todistus, versio II

Epäsuoran todistuksen logiikka on usein ylläolevaa mutkikkaampi. Olkoon D looginen lause, jonka paikkansa pitävyys halutaan todistaa. Tässä D voi olla esimerkiksi implikaatiomuotoa $A \Longrightarrow B$. Tavoitteena on löytää tosi looginen lause C siten, että myös implikaatio $\neg D \Longrightarrow \neg C$ on tosi. Koska implikaatio

$$[C \wedge (\neg D \Longrightarrow \neg C)] \Longrightarrow D \quad \text{(Reductio ad absurdum)} \tag{5}$$

on tautologia (tosi C:n ja D:n totuusarvoista riippumatta) ja implikaation (5) vasen puoli on tosi, on välttämättä myös D tosi.

Käytännössä epäsuora todistus etenee seuraavasti: Tehdään antiteesi eli oletetaan $\neg D$ todeksi ja etsitään tosi looginen lause C siten, että $\neg D$:n voimassa ollessa myös $\neg C$ on tosi. Johtopäätöstä, jonka mukaan sekä C että $\neg C$ ovat tosia, sanotaan *ristiriidaksi.*

Huomautus (a) Jos D on implikaatiomuotoa $A \Longrightarrow B$, niin $\neg D$ on tosi täsmälleen silloin kun A ja $\neg B$ ovat tosia. Siis antiteesi tarkoittaa lauseen $A \wedge \neg B$ todeksi olettamista.

(b) Epäsuoran todistuksen versiossa I ristiriita liittyy implikaation $A \Longrightarrow B$ oletukseen A. Yleisessä versiossa II ristiriita usein liittyy väitteeseen joka ei esiinny oletuksena a priori.

Epäsuoran todistuksen versiota II käyttäen voidaan todistaa:

Lause 1.2.9 Jos P on polynomi ja $\deg P = n$, niin polynomilla P on korkeintaan n kappaletta erillisiä nollakohtia.

Todistus. Tässä D on implikaatiomuotoa "Jos $\deg P = n$, niin polynomilla P on korkeintaan n nollakohtaa". Oletetaan $\neg D$ todeksi eli *tehdään antiteesi*: $\deg P = n$ ja erillisiä nollakohtia on m, missä $m > n$.

Olkoot $x_1, \ldots, x_m$ erilliset nollakohdat. Lemman 1.2.7 nojalla P on muotoa

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

missä $a_n \neq 0$. Mutta tällöin

$$P(x_{n+1}) = a_n(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n) \neq 0.$$

Toisaalta antiteesin seurauksena $P(x_{n+1}) = 0$, joten on päädytty ristiriitaan. Ristiriitainen väite C on muotoa "$P(x_{n+1}) \neq 0$". $\square$

Algebrallisista yhtälöistä

Yhtälöä

$$P(x) = 0, \tag{6}$$

missä P on polynomi, sanotaan *algebralliseksi yhtälöksi*. Yhtälöllä (6) on Lauseen 1.2.9 nojalla korkeintaan $\deg P$ erillistä reaalista ratkaisua. Aiemmin esitettiin tuttu ratkaisukaava toisen asteen algebralliselle yhtälölle.

Huomautus 1.2.10 Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden yleiset ratkaisukaavat keksittiin jo 1500-luvulla (keksijöinä italialaiset Tartaglia ja Ferrari). Kaavat julkisti Cardan julkaisussaan Ars Magna 1545. Viidennen asteen yhtälön ratkaisukaavaa etsittiin innolla kunnes Abel 1824 todisti, että yleistä ratkaisukaavaa ei voi olla olemassa. Korkeamman asteen polynomien eksaktien nollakohtien löytäminen onkin usein mahdotonta ja on tyydyttävä numeerisen analyysin antamiin nollakohtien likiarvoihin. Esimerkkinä tästä kurssin loppupuolella tarkastellaan Newtonin kaavaa.

Kolmannen asteen yhtälön

$$x^3 + px + q = 0, \tag{7}$$

missä p, $q \in \mathbf{R}$, ratkaisu saadaan *Cardanon kaavalla*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
x_2 &= \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
x_3 &= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Huomaa, että Cardanon kaavan ratkaisut eivät välttämättä ole reaalisia. Itseasiassa reaalisten ratkaisujen lukumäärä riippuu diskriminantin $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ merkistä. Cardanon kaava on historiallisesti merkittävä, sillä se on ensimmäisiä tuloksia, jotka sisältävät negatiivisen luvun neliöjuuren.

Emme varsinaisesti käytä tällä kurssilla kolmannen asteen ratkaisukaavaa. Tarkastellaan esimerkkejä tapauksista, joissa korkeamman asteen algebrallinen yhtälö saadaan ratkaistuksi toisen asteen ratkaisukaavalla.

Esimerkki 1.2.11 (a) Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan myös ratkaisu neljännen asteen yhtälölle, jossa esiintyy ainoastaan x:n parillisia potensseja. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöä

$$-2x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Merkitään $x^2 = y$, jolloin yhtälö saa muodon $-2y^2 + y + 1 = 0$. Tämän ratkaisu on

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

eli $y_1 = -\frac{1}{2}$ ja $y_2 = 1$. Alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan yhtälöiden $x^2 = -\frac{1}{2}$ ja $x^2 = 1$ ratkaisuina. Ensimmäisellä yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja, kun taas jälkimmäisellä yhtälöllä on ratkaisut $x = \pm 1$. Nämä ovat samalla tarkasteltavan yhtälön ainoat reaaliset ratkaisut.

(b) Jos esimerkiksi kolmannen asteen yhtälön eräs ratkaisu tunnetaan, muut ratkaisut saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta Lemman 1.2.6 nojalla. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöä

$$x^3 - \frac{7}{2}x - 1 = 0.$$

Yhtälön eräs ratkaisu on $x = 2$, joten jakamalla jakokulmassa saadaan (Lemma 1.2.6)

$$x^3 - \frac{7}{2}x - 1 = (x-2)(x^2 + 2x + \frac{1}{2}) = 0.$$

Siis alkuperäisen yhtälön muut ratkaisut saadaan yhtälön $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$ ratkaisuista. Nämä ovat

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

1.3 Rationaalifunktiot

Rationaalifunktio R on funktio

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä P ja Q ovat polynomeja (Q ei ole nollapolynomi) ja $x \in \mathbf{R}$ siten, että $Q(x) \neq 0$. Siis R on määritelty nimittäjäpolynomin Q nollakohtien ulkopuolella.

Tällä kurssilla rationaalifunktioita tarvitaan lähinnä raja-arvo- ja ääriarvo-ongelmien yksinkertaisena prototyyppinä.

Rationaalifunktion jakaminen osamurtoihin

Tarkastellaan rationaalifunktioita $R = \frac{P}{Q}$, joille $\deg P < \deg Q$. Tarkoituksena on esitellä laskurutiineja, joilla saadaan aikaan rationaalifunktion *osamurtokehitelmä*. Emme tässä yhteydessä perustele, miksi kyseinen rutiini johtaa tulokseen. Huomaa, että saatu tulos voidaan (ja kannattaa) aina tarkistaa.

Tapaus 1. Oletetaan, että $\deg Q = n$ ja että polynomilla Q on n kappaletta erillisiä nollakohtia $x_1, \ldots x_n$. Tällöin rationaalifunktiolla $R = \frac{P}{Q}$ on osamurtokehitelmä

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \\ &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n} \end{aligned}$$

missä $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{R}$ ja $a \neq 0$.

Esimerkki Huomaa, että osamurtokehitelmä ratkaisee R:n integrointiongelman; nimittäin

$$\int \frac{1}{x-x_1}\, dx = \log|x-x_1| + C$$

ja siis

$$\int R(x)\, dx = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \log|x-x_i| + C.$$

Esimerkki 1.3.1 Määrätään osamurtokehitelmä funktiolle

$$R(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Asetetaan

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}, \quad x \neq \pm 1.$$

Kertomalla nimittäjät pois saadaan

$$x = A(x-1) + B(x+1) = Ax - A + Bx + B = (A+B)x + (B-A).$$

Tämä pätee kaikilla $x \neq \pm 1$ vain jos $A + B = 1$ ja $B - A = 0$. Tästä yhtälöparista saadaan ratkaisuiksi $A = \frac{1}{2}$ ja $B = \frac{1}{2}$. Huomaa, että metodi menee n:n kasvaessa työlääksi, koska ratkaisuun pääseminen edellyttää yleisessä tapauksessa yhtälöryhmän ratkaisua tilanteessa, jossa on n tuntematonta ja n yhtälöä.

Esimerkki 1.3.2 Osamurtokehitelmä löytyykin yleensä kätevimmin ns. *Heaviside-metodilla.* Etsitään malliksi vakiot $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{R}$ siten että

$$R(x) := \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} \tag{8}$$

kaikilla $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

Kerrotaan (8) ensin puolittain ”ensimmäisellä nimittäjällä” x, jolloin saadaan

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = A_1 + x\frac{A_2}{x-1} + x\frac{A_3}{x+1}. \tag{9}$$

Tähän voidaan sijoittaa $x = 0$, jolloin saadaan $-1 = A_1$. (Tarkkaan ottaen tässä tulisi vedota yhtälön (9) lausekkeiden jatkuvuuteen pisteessä $x = 0$ koska a priori tarkastellaan vain pisteitä $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.) Sijoitetaan esitykseen (8)$A_1 = -1$ ja kerrotaan seuraavaksi ”toisella nimittäjällä”$x - 1$. Saadaan

$$\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x}(x-1) + A_2 + A_3\frac{(x-1)}{(x+1)}.$$

Nyt sijoitetaan $x = 1$ ja saadaan $A_2 = \frac{1}{2}$. Sijoittamalla $A_2 = \frac{1}{2}$ esitykseen (8) ja kertomalla ”kolmannella nimittäjällä”$x + 1$ todetaan

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + A_3.$$

Sijoitetaan lopuksi $x = -1$, jolloin saadaan $A_3 = \frac{1}{2}$.

Siis

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

kaikilla $x \neq 0$ ja $x \neq \pm 1$. Kertomalla nimittäjät pois voidaan helposti tarkistaa, että tulos on oikein.

Määritelmä 1.3.3 Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Polynomilla Q on *n-kertainen nollakohta* x_0, jos Q on jaollinen polynomilla $(x - x_0)^n$, mutta ei ole jaollinen polynomilla $(x - x_0)^{n+1}$.

Tapaus 2. Jos nimittäjä Q on muotoa

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_s)^{n_s},$$

missä $x_1, \ldots, x_s$ ovat erillisiä Q:n nollakohtia ja $n_i \in \mathbf{N}$, niin jokaista termiä $(x - x_i)^{n_i}$ kohti on osamurtokehitelmään summattava mukaan lauseke

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \cdots + \frac{A_{in_i}}{(x - x_i)^{n_i}}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Esimerkki 1.3.4 Olkoon

$$R(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Nimittäjällä on siis kaksinkertainen nollakohta 0 ja yksinkertainen nollakohta 1.

Etsitään Heaviside-metodilla vakiot $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{R}$ siten, että

$$R(x) = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} = \frac{1}{x^2(x-1)}. \tag{10}$$

Kerrotaan ensin (10) puolittain erotuksella $x - 1$, jolloin todetaan

$$\frac{1}{x^2} = (x-1)\frac{A_1}{x^2} + (x-1)\frac{A_2}{x} + A_3.$$

Sijoittamalla tähän $x = 1$ saadaan $A_3 = 1$. Toisaalta, kertomalla (10) puolittain neliöllä x^2 saadaan

$$\frac{1}{x-1} = A_1 + \frac{A_2 x^2}{x} + x^2\frac{A_3}{x-1}$$

ja sijoittamalla tähän $x = 0$ todetaan $A_1 = -1$. Sijoittamalla $A_1 = -1$ ja $A_3 = 1$ saadaan yhtälö (10) muotoon

$$\frac{1}{x^2(x-1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{A_2}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Tästä vakio A_2 ratkaistaan esimerkiksi sijoittamalla $x = 2$. Tällöin

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{A_2}{2} + 1$$

eli $A_2 = -1$.

Siis kaikilla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ pätee

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Kertomalla nimittäjät pois tarkistetaan helposti, että tulos on oikein.

Huomautus Jos nimittäjäpolynomilla Q on tekijänä vähintään toista astetta oleva polynomi, jolla ei ole reaalisia nollakohtia, niin osamurtokehitelmä mutkistuu entisestään. Tällaisia kehitelmiä emme kuitenkaan tarkastele.

1.4 Reaaliluvut

Morris Kline toteaa teoksessaan Mathematical Thought from Ancient to Modern Times...*One of the most surprising facts in the history of mathematics is that the logical foundation of the real number system was not erected until the late 1900th century...The irrational number, logically defined, is an intellectual monster, and we can see why the Greeks and so many later generations of mathematicians found such numbers difficult to grasp.*

Tässä yhteydessä ei ole mielekästä pyrkiä eksaktisti perustelemaan annettujen määritelmien mielekkyyttä, vaan ennemminkin pyritään antamaan mielikuva reaalilukujen määrittelyn problematiikasta.

Lähdetään siitä oletuksesta, että luonnolliset luvut

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

kokonaisluvut

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

ja rationaaliluvut

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\Big|\; m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

laskutoimitus- ja järjestysominaisuuksineen tunnetaan. Korostettakoon, että rationaaliluvut muodostavat järjestetyn kunnan (Määritelmä 1.4.4), jolla on seuraava *tiheysominaisuus*:

Lemma 1.4.1 Jos $p, q \in \mathbf{Q}$ ja $p < q$, niin on olemassa $r \in \mathbf{Q}$, jolle $p < r < q$.

Todistus. Valitaan esimerkiksi $r = \frac{p+q}{2}$, ks. harjoitustehtävä. $\square$

Lukusuora

Tarkastellaan ensin reaalilukujen intuitiivista ajatusta. Reaaliluvut ovat lukuja, joita voidaan käyttää mitattaessa etäisyyksiä ja aikaa, sekä muita sellaisia fysikaalisia suureita, kuten massaa ja lämpötilaa, joiden ajatellaan muuttuvan jatkuvasti. Reaaliluvut voidaan konkreettisesti tulkita *lukusuoran* pisteiksi. Lukusuora saadaan aikaan, jos annetulta tason suoralta valitaan kaksi pistettä 0 ja 1. Tällöin pituusyksikkö ja positiivinen suunta tulevat kiinnitetyksi. Nyt jokaista lukusuoran positiivisen puolen pistettä vastaa jokin janan pituus ja jokaista negatiivisen puolen pistettä janan pituuden vastaluku. Lukusuoran idea perustuu siis etäisyyden ajatukseen.

Positiivinen rationaaliluku $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, löydetään lukusuoralta jakamalla yksikköjana (jana pisteestä 0 pisteeseen 1) n:ään yhtäpitkään osajanaan ja monistamalla m kappaletta näitä $\frac{1}{n}$:n pituisia janoja peräkkäin.

Rationaalipisteiden joukko lukusuoralla on siinä mielessä epätäydellinen, että kaikkia janojen pituuksia ei voida niiden avulla ilmoittaa. Jo antiikin kreikkalaiset osasivat todistaa, että yksikköneliön lävistäjän pituus, ts. yhtälön $x^2 = 2$ positiivinen ratkaisu, ei ole rationaaliluku (harjoitustehtävä; etsi ratkaisu kirjallisuudesta).

Rationaaliset pisteet eivät siis täytä koko lukusuoraa, vaan on olemassa muitakin pisteitä. Näitä pisteitä kutsutaan *irrationaalisiksi*. Lukusuoran kaikkien pisteiden joukko on reaalilukujen intuitiivinen vastine.

Lukusuora on lukujen määrittelyn kannalta epätäsmällinen lähtökohta, sillä se perustuu intuitiiviseen geometriseen ajatukseen. Reaalilukujen eksakti määrittely on hankala prosessi, ensimmäisen eksaktin lähestymistavan esittävät Dedekind ja Cantor samana vuonna 1872, ks. Boyer: Tieteiden kuningatar, osa II, s. 783–797. Ongelma on siinä, kuinka irrationaaliluvut saadaan määriteltyä vain rationaalilukuja ja niiden ominaisuuksia käyttäen. Cantorin jonokonvergenssiin perustuvaa ideaa emme tarkastele tällä kurssilla. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan (hyvin pinnallisesti) Dedekindin ideaa.

Esimerkki 1.4.2 (Dedekindin leikkaukset) Osajoukkoa $\mathcal{A} \subset \mathbf{Q}$ kutsutaan *leikkaukseksi*, jos $\mathcal{A}$ toteuttaa ehdot (1)-(3):

(1) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ja $\mathcal{A} \neq \mathbf{Q}$,

(2) Jos $x \in \mathcal{A}$ ja $y < x$, niin $y \in \mathcal{A}$,

(3) Jos $x \in \mathcal{A}$, niin $z > a$ jollakin $z \in \mathcal{A}$.

Huomaa, että jos $a \in \mathbf{Q}$, niin joukko

$$\mathcal{A}_a = \{\, x \in \mathbf{Q} \mid x < a \,\}$$

on leikkaus, ts. se toteuttaa ehdot (1)-(3). Perustellaan tämä:

(1). On helppo todeta, että $a - 1 \in \mathcal{A}_a$ ja $a + 1 \notin \mathcal{A}_a$.

(2). Jos $x \in \mathcal{A}_a$ ja $y < x$, niin $x < a$ ja $y < x$. Siis $y < a$ eli $y \in \mathcal{A}_a$.

(3). Jos $x \in \mathcal{A}_a$, niin $x < \frac{x+a}{2} < a$ (Lemma 1.4.1). Siis $z := \frac{x+a}{2} \in \mathcal{A}_a$ ja $z > x$.

Leikkauksia $\mathcal{A}_a$, $a \in \mathbf{Q}$, kutsutaan *rationaalisiksi leikkauksiksi*. Voidaan myöskin todeta, että joukko

$$\mathcal{A} = \{\, x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2 \,\} \cup \{\, x \in \mathbf{Q} \mid x < 0 \,\}$$

on leikkaus joka ei kuitenkaan ole rationaalinen leikkaus (perustelu sivuutetaan). Itseasiassa leikkauksen intuitiivinen idea on se, että leikkaus ilmaisee annettua lukusuoran (mahdollisesti irrationaalista) pistettä aidosti pienempien rationaalisten pisteiden muodostaman joukon. Määritelmän viisaus piilee siinä, että leikkauksen käsite on määritelty ainoastaan rationaalilukujen ja niiden järjestysrelaation avulla.

Dedekind määritteli edelleen leikkausten joukossa yhteenlaskun, kertolaskun ja järjestyksen sekä osoitti että laskutoimitukset ja järjestys toteuttavat kaikki ne ominaisuudet, jotka lukusuoraan perustuvan intuition pohjalta tulee olla voimassa. Yksityiskohtainen todistus tälle on periaatteessa alkeellinen, mutta monivaiheisena pitkä, ks. Landau: Foundations of Analysis (1966), s.43–91. Dedekindin leikkaukset antavat siis erään mallin reaalilukustruktuurille. Muitakin malleja (kuten Cantorin malli) on olemassa, mutta voidaan todistaa että kaikki mallit ovat algebrallisessa mielessä identtisiä.

Reaalilukujen aksiomaattinen määritelmä

Reaalilukujen aksiomaattinen määritelmä on periaatteessa helppo esittää. Ongelmana on toisaalta se, että määritelmän mielekkyys ei ole a priori selvää ja toisaalta se että määritelmän lähempi tarkastelu ei ole kovin mielekästä ennenkuin abstraktin algebran alkeet hallitaan. Määritelmän lähtökohtana on järjestetyn kunnan käsite.

Määritelmä 1.4.3 Olkoon F vähintään kahden alkion joukko, jossa on määritelty kaksi laskutoimitusta $+$ ja $\cdot$. Tällöin kolmikko $(F, +, \cdot)$ on *kunta (field)*, jos seuraavat aksiomat (A1)–(A9) ovat voimassa:

(A1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in F$, (yhteenlaskun vaihdannaisuus)

(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ kaikilla $x, y, z \in F$, (yhteenlaskun liitännäisyys)

(A3) On olemassa alkio $0 \in F$, jolle pätee $x + 0 = x$ kaikilla $x \in F$,

(A4) Kaikilla $x \in F$ on olemassa $-x \in F$, jolle $x + (-x) = 0$,

(A5) $x \cdot y = y \cdot x$ kaikilla $x, y \in F$, (kertolaskun vaihdannaisuus)

(A6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ kaikilla $x, y, z \in F$, (kertolaskun liitännäisyys)

(A7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ kaikilla $x, y, z \in F$, (osittelulaki)

(A8) On olemassa alkio $1 \in F$, joka toteuttaa ehdon $1 \cdot x = x$ kaikille $x \in F$,

(A9) Kaikilla $x \in F \setminus \{0\}$ on olemassa $x^{-1} \in F$, jolle $x \cdot x^{-1} = 1$.

Huomautus Algebran kurssilla opitaan miksi jokaisessa kunnassa *nolla-alkio* 0, *ykkösalkio* 1, *vasta-alkio* $-x$ ja *käänteisalkio* x^{-1} ovat yksikäsitteisiä. Määritelmässä 1.4.3 0 ja 1 eivät ole lukuja (yleensä), vaan ehtojen (A3) ja (A8) kautta määriteltyjä erityisiä joukon F alkioita.

Määritelmä 1.4.4 Kunta $(F, +, \cdot)$ on *järjestetty kunta*, jos joukossa F on määritelty relaatio $<$, joka toteuttaa seuraavat ehdot (B1)–(B4) kaikilla $x, y, z \in F$:

(B1) Täsmälleen yksi ehdoista $x < y$, $x = y$, $y < x$ pätee,

(B2) Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$,

(B3) Jos $x < y$, niin $x + z < y + z$,

(B4) Jos $x > 0$ ja $y > 0$, niin $x \cdot y > 0$.

Järjestetyssä kunnassa merkitään $x \leq y$ jos $x < y$ tai $x = y$. Järjestetyn kunnan aksiomeja käyttäen voidaan todistaa kaikki lukiomatematiikasta tutut reaalilukujen yhteen- ja kertolaskua sekä järjestysrelaatiota koskevat laskusäännöt. Seuraavaan lauseeseen on koottu tärkeimmät järjestetyn kunnan aksiomien seuraukset:

Lause 1.4.5 Olkoon $(F, +, \cdot, <)$ järjestetty kunta ja olkoot $x, y, z, w, a, b \in F$.

(a) Jos $a + x = a + y$, niin $x = y$,

(b) Jos $ax = ay$ ja $a \neq 0$, niin $x = y$,

(c) Jos $x + a = b$, niin $x = b - a$,

(d) Jos $xa = b$, missä $a \neq 0$, niin $x = \frac{b}{a} := ba^{-1}$,

(e) $xy = 0$ jos ja vain jos $x = 0$ tai $y = 0$,

(f) $-(-x) = x$,

(g) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$,

(h) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

(i) $-(x + y) = (-x) + (-y)$,

(j) Jos $x \leq y$ ja $x \geq y$ niin $x = y$,

(k) Jos $x < y$ ja $z < w$ niin $x + z < y + w$,

(l) Jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $xz < yz$,

(m) Jos $x < y$ ja $z < 0$, niin $xz > yz$,

(n) Jos $0 < x < y$ ja $0 < z < w$, niin $xz < yw$,

(o) Jos $x \neq 0$, niin $x^2 > 0$,

(p) Jos $x > 0$ ja $y > 0$, niin $x^2 < y^2$ jos ja vain jos $x < y$,

(q) Jos $x > 0$ ja $y > 0$, niin $x^2 = y^2$ jos ja vain jos $x = y$,

(r) Jos $x \neq 0$, niin x ja x^{-1} ovat samanmerkkiset,

(s) Jos $0 < x < y$, niin $0 < y^{-1} < x^{-1}$,

(t) Jos $x < y < 0$, niin $y^{-1} < x^{-1} < 0$,

(u) $0 < 1$.

Todistus. Kohdat (a)–(i) perustellaan algebran kurssilla. Kohdat (j)–(n) jätetään harjoitustehtäväksi.

Perustellaan malliksi kuinka ehdot (o), (p) ja (q) saadaan aikaan kun edeltävät kohdat pidetään tunnettuna.

(o). Aksioman (B1) nojalla joko $x > 0$ tai $x < 0$. Jos $x > 0$, niin (B4):n mukaan $x^2 > 0$. Jos taas $x < 0$, niin (kertomalla epäyhtälö x:llä) saadaan $x^2 > 0$ kohtien (e) ja (m) seurauksena.

(p). Olkoot $x > 0$ ja $y > 0$. Tällöin implikaatio $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ on kohdan (n) erikoistapaus. Käänteisen implikaation $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$ todistamiseksi tehdään antiteesi $x \geq y$. Jos $x = y$, niin $x^2 = y^2$, mikä on aksioman (B1) perusteella ristiriidassa oletuksen kanssa. Jos $x > y$, niin alkuosan nojalla $y^2 < x^2$, mikä on jälleen aksioman (B1) nojalla ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis myös (p) pätee.

(q). Ehdon (q) todistamiseksi huomaa, että $x^2 = y^2$ jos $x = y$. Implikaation $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ todistamiseksi tehdään jälleen antiteesi: Oletetaan, että $x \neq y$. Tällöin joko $x < y$ tai $x > y$ (aksioma (B1)). Kohdan (p) mukaan $x^2 < y^2$ tai $x^2 > y^2$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis myös (q) pätee.

Muut kohdat todetaan samantasoisella päättelyllä. □

Huomautus Lukijan tulisi kohdissa (k)-(t) itse formuloida vastaavat väitteet tapauksissa, jossa ainakin yksi aidoista epäyhtälörelaatioista $<$ korvataan relaatiolla $\leq$.

Pidetään tunnettuna, että rationaaliluvut $(\mathbf{Q}, +, \cdot, <)$ muodostavat järjestetyn kunnan. On toisaalta luonnollista vaatia, että reaaliluvut muodostavat rationaalilukuja laajemman lukusysteemin, joka kuitenkin edelleen toteuttaa järjestetyn kunnan vaatimukset. Seuraavan lauseen olemassaoloväitteen todistivat siis (ainakin olennaisesti) Dedekind ja Cantor. Yksikäsitteisyys- ja alikuntaväitteisiin emme tässä puutu koska ne edellyttävät algebran alkeiden tuntemusta. Alikuntaväite tarkoittaa käytännössä sitä, että $\mathbf{Q}$ voidaan tulkita $\mathbf{R}$:n osajoukoksi.

Lause 1.4.6 On olemassa järjestetty kunta $(\mathbf{R}, +, \cdot, <)$, joka toteuttaa täydellisyysaksioman ja sisältää järjestettynä alikuntanaan rationaalilukukunnan $(\mathbf{Q}, +, \cdot, <)$. Lisäksi kunta $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ on algebrallisessa mielessä yksikäsitteinen.

Lauseen 1.4.6 kuntaa $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ kutsutaan *reaalilukukunnaksi (reaaliluvuiksi)*. Seuraavaksi perehdymme siihen, mitä täydellisyysaksiomalla tarkoitetaan.

Supremum ja infimum

Lukujoukoilla $\mathbf{Q}$ ja $\mathbf{R}$ on se merkittävä ero, että rationaaliluvut eivät muodosta ”jatkumoa”kuten reaaliluvut. Täydellisyysaksiomassa on kyse tämän intuitiivisen jatkumoajatuksen eksaktista ilmaisemisesta.

Määritelmä 1.4.7 Osajoukko $E \subset \mathbf{R}$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $a \in \mathbf{R}$ siten, että $x \leq a$ kaikilla $x \in E$. Tällöin lukua $a \in \mathbf{R}$ sanotaan joukon E *ylärajaksi*. Edelleen a on joukon E *suurin luku*, merkitään $a = \max E$, jos $a \in E$ ja a on joukon E yläraja.

Määritelmä 1.4.8 Olkoon $E \subset \mathbf{R}$ ylhäältä rajoitettu. Luku $a \in \mathbf{R}$ on joukon E *pienin yläraja (supremum)*, merkitään $a = \sup E$, jos ehdot (1) ja (2) toteutuvat:

(1) a on joukon E yläraja,

(2) Jos $b \in \mathbf{R}$ on joukon E yläraja, niin $a \leq b$.

Lauseen 1.4.6 mukaan reaaliluvut toteuttavat seuraavan *täydellisyysaksioman*:

Täydellisyysaksioma Jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on pienin yläraja joukossa $\mathbf{R}$.

Esimerkki 1.4.9 (a) Havainnollisesti lukusuoralla ajateltuna $\sup E$ on se piste, jossa joukkoon E "törmätään"kun lähestytään joukkoa E oikealta puolelta. Törmäyslogiikkaa käyttäen on ilmeistä, että

$$\sup]0, 2[= 2 = \sup]0, 2].$$

Perustellaan väite Määritelmää 1.4.8 käyttäen. Olkoon esim. $E =]0, 2[$.

(1). Koska $x < 2$ kaikilla $x \in E$, niin 2 on joukon E yläraja.

(2). Perustellaan väite negaation kautta (epäsuora todistus, versio I). Tätä varten, oletetaan, että $1 < b < 2$. Nyt esimerkiksi luvulle $a := \frac{b+2}{2}$ pätee $a \in E$ ja $a > b$. Siis b ei ole joukon E yläraja. Tietenkään mikään luku $b \leq 1$ ei myöskään ole E:n yläraja, joten yksikään luku $b < 2$ ei ole E:n yläraja. Siis myös (2) pätee.

(b) Olkoon $E = \{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \}$. Nyt $\sup E = 1$. Perustellaan väite Määritelmää 1.4.8 käyttäen:

(1). Koska $1 - \frac{1}{n} < 1$, niin 1 on E:n yläraja.

(2). Epäsuora todistus: Olkoon $0 < b < 1$. Nyt

$$b < 1 - \frac{1}{n} \iff nb < n - 1 \iff n(b-1) < -1 \iff n > \frac{-1}{b-1} = \frac{1}{1-b}.$$

Tämä osoittaa, että b ei ole E:n yläraja. Myöskään luku $b \leq 0$ ei tietenkään ole E:n yläraja.

Huomautus 1.4.10 Pienimmän ylärajan käsite voidaan vastaavasti määritellä jokaisessa järjestetyssä kunnassa. Reaalilukujen ja rationaalilukujen ero on se, että rationaaliluvut eivät toteuta täydellisyysaksiomaa. Esimerkiksi joukolla

$$E = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2 \}.$$

ei ole pienintä ylärajaa joukossa $\mathbf{Q}$. Tämän perustelu kuitenkin sivuutetaan.

Huomautus 1.4.11 Jos $E \subset \mathbf{R}$ on epätyhjä ja $a := \max E \in \mathbf{R}$, niin $a = \sup E$. Todistetaan tämä osoittamalla, että Määritelmän 1.4.8 ehdot (1) ja (2) toteutuvat:

(1) Koska $a = \max E$, niin a on eräs E:n yläraja.

(2) Jos b on E:n yläraja, niin $x \leq b$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti $a \leq b$.

Reaalilukukunta toteuttaa seuraavan Arkhimedeen ominaisuuden:

Lause 1.4.12 Jos $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x > 0$, niin on olemassa luonnollinen luku $n \in \mathbf{N}$, jolle pätee

$$nx > y.$$

Todistus. Olkoon $A = \{ nx \mid n \in \mathbf{N} \}$. Tehdään antiteesi eli oletetaan, että $nx \leq y$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Tällöin y on joukon A yläraja ja täydellisyysaksioman nojalla $\alpha := \sup A \in \mathbf{R}$. Koska $\alpha - x < \alpha$, niin $\alpha - x$ ei ole A:n yläraja. On siis olemassa $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $n_0 x > \alpha - x$. Tämän seurauksena $\alpha < (n_0 + 1)x \in A$, mikä on ristiriidassa sen kanssa että α on joukon A yläraja. Siis väite pätee. $\square$

Arkhimedeen ominaisuus voi tuntua itsestään selvältä lukusuoraan pohjautuvan geometrisen tulkinnan kautta. Huomattakoon kuitenkin, että on olemassa järjestettyjä kuntia, jotka eivät toteuta Arkhimedeen ominaisuutta. Toisaalta Lauseen 1.4.12 seurauksena saadaan tärkeä tulos joka kertoo, että $\mathbf{Q}$ on tiheä joukossa $\mathbf{R}$:

Lause 1.4.13 Jos $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x < y$, niin on olemassa $p \in \mathbf{Q}$, jolle $x < p < y$.

Todistus. Koska $x < y$, on $y - x > 0$ ja Lauseen 1.4.12 nojalla on olemassa $n \in \mathbf{N}$, jolle $n(y - x) > 1$. Samoin Lauseen 1.4.12 nojalla löydetään $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$, joille $m_1 = m_1 \cdot 1 > nx$ ja $m_2 = m_2 \cdot 1 > -nx$. Siispä

$$-m_2 < nx < m_1.$$

Edelleen on olemassa kokonaisluku $m \in \mathbf{Z}$ $(-m_2 \leq m \leq m_1)$, jolle pätee

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Yhdistämällä epäyhtälöt saadaan

$$nx < m \leq 1 + nx < ny.$$

Koska $n \geq 1$, saadaan jakamalla puolittain luvulla n, että

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

$\square$

Myös $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (= irrationaaliluvut) on tiheä joukossa $\mathbf{R}$:

Lause 1.4.14 Jos $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x < y$, niin on olemassa $z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, jolle $x < z < y$.

Todistus. Tehdään antiteesi eli oletetaan, että $]x, y[\subset \mathbf{Q}$. Valitaan $p, q \in]x, y[$ siten, että $p, q \in \mathbf{Q}$ ja $p < q$. Tällöin siis $[p, q] \subset \mathbf{Q}$ ja myös $E := [0, q - p] \subset \mathbf{Q}$, sillä jos $x \in E$, niin x on muotoa $x = y - p$, missä $y \in [p, q]$. Arkhimedeen ominaisuudesta seuraa, että

$$\mathbf{R}_+ := \{ x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0 \} = \cup_{i=1}^{\infty} [(i-1)(q-p), i(q-p)].$$

Väitteen $E \subset \mathbf{Q}$ todistusideaa käyttäen voidaan päätellä myös, että $[(i-1)(q-p), i(q-p)] \subset \mathbf{Q}$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Näin ollen $\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{Q}$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $\sqrt{2}$ on positiivinen irrationaaliluku. $\square$

Yhdistämällä Lauseet 1.4.13 ja 1.4.14 saadaan patologinen esimerkki ei-missään jatkuvasta funktiosta:

Esimerkki 1.4.15 Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Tällöin f ei ole yhdessäkään pisteessä jatkuva. Tämä perustellaan myöhemmin.

Määritelmä 1.4.16 Osajoukko $E \subset \mathbf{R}$ on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $a \in \mathbf{R}$ siten, että $a \leq x$ kaikilla $x \in E$. Tällöin lukua $a \in \mathbf{R}$ sanotaan joukon E *alarajaksi*. Edelleen a on joukon E *pienin luku*, merkitään $a = \min E$, jos $a \in E$ ja a on joukon E alaraja.

Määritelmä 1.4.17 Olkoon $E \subset \mathbf{R}$ alhaalta rajoitettu. Luku $a \in \mathbf{R}$ on joukon E *suurin alaraja (infimum)*, merkitään $a = \inf E$, jos ehdot (1) ja (2) toteutuvat:

(1) a on joukon E alaraja,

(2) Jos $b \in \mathbf{R}$ on joukon E alaraja, niin $b \leq a$.

Reaalilukujen pienimmän ylärajan ominaisuudesta seuraa myös suurimman alarajan ominaisuus:

Lause 1.4.18 Jokaisella reaalilukujen alhaalta rajoitetulla osajoukolla on suurin alaraja joukossa $\mathbf{R}$.

Todistus. Olkoon $E \subset \mathbf{R}$ epätyhjä ja alhaalta rajoitettu. Merkitään

$$F := -E := \{ -x \mid x \in E \}.$$

Koska E on alhaalta rajoitettu, niin E:llä on alaraja. Olkoon m joukon E alaraja jolloin $m \leq x$ kaikilla $x \in E$. Tällöin $-x \leq -m$ kaikilla $x \in E$ eli $-m$ on joukon F yläraja. Siis F on ylhäältä rajoitettu, joten täydellisyysaksioman nojalla $M := \sup F \in \mathbf{R}$.

Osoitetaan, että $-M = \inf E$:

(1) Olkoon $x \in E$. Tällöin $-x \in F$, joten $-x \leq M$. Näin ollen $x \geq -M$ eli $-M$ on joukon E (eräs) alaraja.

(2) Olkoon m eräs E:n alaraja, jolloin siis $-m$ on joukon F yläraja. Tällöin supremumin määritelmän nojalla $-m \geq M$, joten $m \leq -M$. Siis $-M$ on E:n alarajoista suurin. □

Esimerkki 1.4.19 (a) Lukusuoralla havainnollistettuna alhaalta rajoitetun joukon E suurin alaraja $\inf E$ on se piste, jossa joukkoon E törmätään, kun lähestytään joukkoa E vasemmalta. Esimerkiksi

$$\inf]0,2[= \inf [0,2[= 0.$$

Tämä perustellaan tarkkaan aivan kuten Esimerkin 1.4.9 kohdassa (a).

(b) Olkoon $E = \mathbf{Q} \cap]-1, +\infty[$. Tällöin $\inf E = -1$. Todistetaan väite määritelmää käyttäen:

(1). Jos $x \in E$, niin $x > -1$. Siis -1 on eräs E:n alaraja.

(2). Epäsuora todistus: Olkoon $b > -1$. Tällöin on olemassa $p \in \mathbf{Q}$ siten, että $-1 < p < b$ (Lause 1.4.13). Siis ei ole E:n alaraja.

(c) Jos $E \subset \mathbf{R}$ on epätyhjä ja $a := \min E \in \mathbf{R}$, niin $a = \inf E$. Siis joukon infimum yhtyy minimumiin jos jälkimmäinen on olemassa. Tämän todetaan samalla tavalla kuin vastaava supremumia koskeva väite (harjoitustehtävä).

Huomautus Vaikka lukusuora ei kelpaa reaalilukujen määritelmäksi, on luonnollista ottaa se mielikuvaksi reaalilukujen joukosta. Lukusuoran avulla voidaan havainnollistaa useita reaalilukujen ominaisuuksista. Erityisesti järjestystä $x < y$ vastaa pisteiden järjestys suoralla $\mathbf{R}$.

2 Reaalilukujonoista

2.1 Määritelmä

Supremumin ja infimumin yhteydessä törmättiin jo välillisesti lukujonon suppenemisen ideaan. Idea on analyysin ymmärtämisen kannalta tärkeä, sillä jonojen suppenemisen kautta voi yksinkertaisimmassa muodossaan omaksua suppenemisen määritelmän ja tiettyjä universaaleja ominaisuuksia. Tämä helpottaa asioiden omaksumista niin kurssin loppupuolella kuin muillakin analyysin kursseilla.

Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbf{N}$ kohti annetaan yksikäsitteisesti määrätty luku $x_n \in \mathbf{R}$, saadaan (reaaliluku)jono

$$(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

jota merkitään lyhyesti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tai $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Indeksistä n riippuvaa lukua x_n sanotaan lukujonon $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *n:nneksi alkioksi (termiksi).*

Esimerkki Lukujonon $x_n = \frac{1}{n^2}$ alkioita ovat

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots .$$

Lukujonon $y_n = \frac{n}{n+1}$ alkioita ovat

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots .$$

Lukujonon $x_n = \frac{1}{n^2}$ alkiot ovat hyvin lähellä lukua 0, kun n on suuri. Vastaavasti lukujonon $y_n = \frac{n}{n+1}$ alkiot ovat hyvin lähellä lukua 1, kun n on suuri. Luvut 0 ja 1 ovatkin lukujonojen $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ja $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ raja-arvoja (vastaavassa järjestyksessä). Raja-arvon matemaattinen määritelmä on kiteytynyt seuraavaan muotoon:

Määritelmä 2.1.1 Jono $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *suppenee* kohti *raja-arvoa* $x \in \mathbf{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ pätee

$$|x_n - x| < \varepsilon. \tag{11}$$

Tällöin merkitään $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Jos jono $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ei suppene kohti reaalista raja-arvoa, se *hajaantuu.*

Huomautus Huomaa, että ehto $|x_n - x| < \varepsilon$ on ekvivalentti ehdon $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ kanssa (perustele!). Geometrisesti ehto (11) tarkoittaa sitä, että raja-arvon x ja jonon alkion x_n välinen etäisyys on pienempi kuin ε.

Jonon raja-arvon määritelmä symbolimuodossa:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \; : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Huomautus 2.1.2 (a) Määritelmässä 2.1.1 ei ole olennaista löytää parasta lukua n_ε, vaan ainoastaan *jokin* vaadittavan ehdon toteuttava luku n_ε. Alaindeksi ε viittaa siihen, että n_ε riippuu luvusta $\varepsilon > 0$. Merkinnän n_ε ohella käytämme myös merkintää $n(\varepsilon)$.

(b) Raja-arvon määritelmän omaksuminen vaatii työstämistä. Kannattaa huomata, että määritelmä yo. muodossaan on vasta reilut sata vuotta vanha. Tästäkin voi päätellä, että määritelmään sisältyy jotain ei-triviaalia.

(c) Määritelmästä seuraa, että raja-arvo on yksikäsitteinen. Tämä tarkoittaa: Jos jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on annettu, korkeintaan yksi luku $x \in \mathbf{R}$ toteuttaa Määritelmän 2.1.1.

Yksikäsitteisyys todistetaan antiteesin kautta seuraavasti: Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, missä $x \neq x^*$. Olkoon esimerkiksi $x < x^*$. Valitaan $\varepsilon = \frac{x^*-x}{4}$ ja sovelletaan raja-arvon määritelmää sekä lukuun x että lukuun x^*. Löydetään $n_1(\varepsilon) > 0$ ja $n_2(\varepsilon) > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} n \geq n_1(\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow x - \tfrac{x^*-x}{4} < x_n < x + \tfrac{x^*-x}{4}, \\ n \geq n_2(\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad |x_n - x^*| < \varepsilon \Rightarrow x^* - \tfrac{x^*-x}{4} < x_n < x^* + \tfrac{x^*-x}{4}. \end{aligned}$$

Jos nyt $n(\varepsilon) := \max\{\, n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\,\}$ ja $n \geq n(\varepsilon)$, kummatkin arviot oikealla puolella ovat voimassa, ja saadaan

$$x + \frac{x^*-x}{4} > x_n > x^* - \frac{x^*-x}{4}.$$

Siis

$$\frac{x^*-x}{2} > x^* - x,$$

mikä on ristiriita.

(d) Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jono $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, ts. nolla ja yksi vuorottelevat loputtomiin. Tällöin jonolla $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ei ole raja-arvoa. Myöskään jonolla $x_n = n$ ei ole raja-arvoa Määritelmän 2.1.1 mielessä. Perusteluja tarkastellaan myöhemmin.

Esimerkki 2.1.3 (a) (Vakiojono) Oletetaan, että on olemassa $a \in \mathbf{R}$ siten, että $x_n = a$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Jos nimittäin $\varepsilon > 0$ on annettu, niin $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Siis kaikki luonnolliset luvut kelpaavat luvuksi n_ε olipa ε mikä hyvänsä.

(b) Tarkastellaan jonoa

$$x_n := \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Jono näyttää suppenevan kohti lukua 0. Todistetaan tämä Määritelmään 2.1.1 nojaten. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin pätee ekvivalenssi

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff 1 < n\varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Jos nyt valitaan $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ (mikä tahansa ehdon toteuttava kelpaa), niin ekvivalenssiketjusta voidaan päätellä, että indeksin arvoilla $n \geq n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ pätee $|x_n - 0| < \varepsilon$.

(c) Olkoon

$$x_n = \frac{1}{(n+3)^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Myös nyt pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Tarkastellaan, miten n_ε riippuu annetusta luvusta $\varepsilon > 0$. Jos $\varepsilon = 1$, niin

$$|x_n - 0| < 1 \iff \frac{1}{(n+3)^2} < 1 \iff (n+3)^2 > 1 \iff (n+3) > 1 \iff n > -2.$$

Siis epsilon-ehto pätee kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Olkoon seuraavaksi $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Tällöin

$$|x_n - 0| < \frac{1}{100} \iff \frac{1}{(n+3)^2} < \frac{1}{100} \iff (n+3)^2 > 100 \iff (n+3) > 10 \iff n > 7.$$

Siis epsilon-ehto pätee kaikilla $n \geq 8$ ja luvuksi n_ε voidaan valita esimerkiksi $n_\varepsilon = 8$. Samalla lailla nähdään, että jos $\varepsilon = 10^{-4}$, niin epsilon-ehto pätee kaikilla $n > 97$. Tällöin pienin mahdollinen n_ε on luku 98. Yleisesti, jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin

$$|x_n - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{(n+3)^2} < \varepsilon \iff (n+3)^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff (n+3) > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 3.$$

Mikä hyvänsä ehdon $n_\varepsilon \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 3$ toteuttava indeksi n_ε kelpaa luvuksi n_ε.

(d) Raja-arvon määritelmä *ei* tarkoita, että suppeneminen kohti raja-arvoa välttämättä olisi monotonista siinä mielessä, että n:n kasvaessa x_n olisi aina vain lähempänä raja-arvoa. Olkoon esimerkiksi

$$x_n = \frac{3^{1+(-1)^n}}{n},$$

jolloin parillisilla n pätee $x_n = \frac{9}{n}$, mutta parittomilla n pätee $x_n = \frac{1}{n}$. Silti on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Perusteluun palataan myöhemmin.

Esimerkki 2.1.4 Jonon alkupään alkioiden perusteella ei voi sanoa mitään varmaa raja-arvosta. Olkoon esimerkiksi

$$x_n = \frac{2n^2 + 10^6 n}{3n^2}.$$

Nyt jonon ensimmäiset alkiot (termit) ovat

$$\frac{1000002}{3}, \frac{2000008}{12}, \frac{3000018}{27}, \ldots.$$

Ensimmäisten termien perusteella on vaikea päätellä, mikä raja-arvo on tai onko raja-arvoa ylipäätään olemassa.

Itseasiassa $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$. Tämän perustelemiseksi on kuitenkin johdettava ensin yleisiä raja-arvon ominaisuuksia.

2.2 Suppenemisen perusominaisuudet

Tarkastellaan aluksi tärkeää suppenemisperiaatetta, joka on myös intuitiivisesti varsin ilmeinen:

Lause 2.2.1 (Kuristusperiaate I) Oletetaan, että reaalilukujonoille $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ja $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$pätee:

(a) On olemassa $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $x_n \le y_n \le z_n$ kaikilla $n \ge n_0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja merkitään $a := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. Oletusten (b) mukaan on olemassa $n_1(\varepsilon) \ge n_0$ ja $n_2(\varepsilon) \ge n_0$ siten, että

$$\begin{aligned} n \ge n_1(\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \\ n \ge n_2(\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Valitaan $n(\varepsilon) := \max\{\, n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\,\}$. Tällöin kaikilla $n \ge n(\varepsilon)$ pätee oletuksen (a) nojalla

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n \le a + \varepsilon.$$

Siis $|y_n - a| < \varepsilon$ kaikilla $n \ge n(\varepsilon)$ eli väite pätee. $\square$

Esimerkki 2.2.2 (a) Lauseen 2.2.1 mukaan $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0$, sillä

$$-\frac{1}{n} \le |(-1)^n \frac{1}{n}| \le \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \pm\frac{1}{n} = 0.$$

(b) Olkoon $x_n = \frac{1}{n^2+5n+2}$. Tällöin

$$0 \le x_n \le \frac{1}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$, sillä $n \le n^2 + 5n + 2$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Lauseen 2.2.1 nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Olkoon $x_n = \frac{1}{n^3 - 5\pi n^2}$. Nyt $n^3 - 5\pi n^2 = n^2(n - 5\pi) \ge n^2$ jos $n \ge 17$. Siis arvoilla $n \ge 17$ pätee

$$0 \le x_n \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}.$$

Kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(d) Olkoon $k \in \mathbf{N}$ annettu. Kuten edellä, perustellaan yleisesti se, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Olkoot $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ kaksi reaalilukujonoa. Tällöin *summajono* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *tulojono* $(x_n y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ja *osamääräjono* $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbf{N}}$ määritellään luonnollisella tavalla, ts. summajonon n:s alkio on $x_n + y_n$, tulojonon n:s alkio on $x_n y_n$ ja osamääräjonon n:s alkio on $\frac{x_n}{y_n}$. Esimerkiksi, jos

$$x_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{ja} \quad y_n = \frac{n}{n+1},$$

niin

$$x_n + y_n = \frac{1}{n^2} + \frac{n}{n+1} = \frac{n^3 + n + 1}{n^2(n+1)},$$

$$x_n y_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)}$$

ja

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n^3}.$$

Lause 2.2.3 Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$ siten, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tällöin

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$,

(b) $\lim_{n\to\infty} ax_n = ax$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ jos $y \neq 0$.

Ennen Lauseen 2.2.3 todistamista tarkastellaan kuinka tulosta voidaan hyödyntää raja-arvon määräämisessä.

Esimerkki 2.2.4 (a) Olkoon

$$x_n = \frac{3^{1+(-1)^n}}{n}.$$

Nyt $0 \leq x_n \leq \frac{9}{n}$, joten kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ jos $\lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} = 0$. Mutta jälkimmäinen väite pätee Lauseen 2.2.3 kohdan (b) nojalla, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(b) Perustellaan väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 10^6 n}{3n^2} = \frac{2}{3}.$$

Jakamalla osamäärä luvulla n^2 saadaan

$$\frac{2n^2 + 10^6 n}{3n^2} = \frac{2 + \frac{10^6}{n}}{3}.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, niin kohdan (b) nojalla $\lim_{n\to\infty} \frac{10^6}{n} = 0$. Vakiojonon raja-arvo on kyseinen vakio, joten kohdan (a) perusteella

$$\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{10^6}{n}) = 2$$

ja edelleen kohdan (d) perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 10^6 n}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{10^6}{n}}{3} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{10^6}{n})}{\lim_{n\to\infty} 3} = \frac{2}{3}.$$

Määritelmä 2.2.5 Jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|x_n| \leq M$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

On useita tärkeitä yhteyksiä, joissa lukujono määritellään *rekursiivisesti*, ts. jonon seuraava alkio määritellään analyyttisesti edellisten avulla. Kuuluisa esimerkki tällaisesta on *Fibonaccin lukujono* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ja $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Esimerkki 2.2.6 Määritellään jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ asettamalla

$$x_1 = 0 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 5, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Osoitetaan induktiolla, että jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on rajoitettu. Tarkkaan ottaen todistamme induktiolla, että $0 \le x_n \le 10$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Ensimmäinen epäyhtälö on helppo todeta, joten todistamme vain toisen. Huomaa, että rajoittuneisuuden todistamisessa ensimmäinen (melkeinpä suurin) vaikeus on todistettavan väitteen löytäminen.

Väite: $x_n \le 10$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Induktiotodistus: (1) $x_1 = 0 \le 10$ eli väite pätee indeksin arvolla $n = 1$.

(2) Tehdään induktio-oletus eli oletetaan, että $x_n \le 10$. Tällöin

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 5 \le \frac{1}{2} \cdot 10 + 5 = 10.$$

Siis $x_{n+1} \le 10$.

Induktioperiaatteen mukaisesti väite pätee kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Seuraava aputulos on ilmeinen (todistus harjoitustehtävä):

Lemma 2.2.7 Suppeneva jono on rajoitettu.

Lauseen 2.2.3 todistus Lauseen 2.2.3 kohdat (a) ja (b) on ”helppo”todistaa, kohtien (c) ja (d) todistus on teknisempi.

Todistus. (b) Jos $a = 0$, kyseessä on vakiojono ja väite on selvä. Olkoon $a \ne 0$ ja $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Mutta tällöin kaikilla $n \ge n_\varepsilon$ pätee

$$|ax_n - ax| = |a||x_n - x| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon,$$

joten kohta (b) on todistettu.

(a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa $n_1 \in \mathbf{N}$ ja $n_2 \in \mathbf{N}$ siten, että

$$n \ge n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad n \ge n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jos nyt $n_\varepsilon := \max\{\, n_1, n_2 \,\}$, niin kolmioepäyhtälön nojalla kaikilla $n \ge n_\varepsilon$ pätee

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Koska jono $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on rajoitettu (Lemma 2.2.7), on olemassa $M > 0$ siten, että $|y_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Valitaan $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ siten, että

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{ja} \quad n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)}.$$

Jos nyt $n_\varepsilon := \max\{\, n_1, n_2 \,\}$, niin kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| = |y_n(x_n - x) + x(y_n - y)| \\ &\leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| \leq M \cdot \tfrac{\varepsilon}{2M} + |x| \cdot \tfrac{\varepsilon}{2(|x|+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen.

(d) Todistetaan ensin implikaatio

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1. \tag{12}$$

Tätä varten, olkoon $0 < \varepsilon < 1$ ja valitaan $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että $|x_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Arvoilla $n \geq n_\varepsilon$ pätee $|x_n - 1| < \frac{1}{2}$ eli $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2}$. Näin ollen arvoilla $n \geq n_\varepsilon$ saadaan

$$\left|\frac{1}{x_n} - 1\right| = \left|\frac{1 - x_n}{x_n}\right| = \frac{|1 - x_n|}{|x_n|} < 2|1 - x_n| < \varepsilon,$$

mikä todistaa väitteen (12). Ehtoa (12) käyttäen yleinen väite saadaan seuraavalla tempulla; havaitaan ensin, että kohdan (b) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y} \cdot y_n = \frac{1}{y} \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{y} \cdot y = 1.$$

Näin ollen kohtien (b), (c) sekä implikaation (12) perusteella saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{y_n} \cdot x_n = \frac{1}{y} \cdot 1 \cdot x = \frac{x}{y}.$$

□

Seuraavan kuristusperiaateversion perustelu seuraa jokseenkin välittömästi raja-arvon määritelmästä (todistus harjoitustehtävä):

Seuraus 2.2.8 (Kuristusperiaate II) Oletetaan, että reaalilukujonoille $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pätee

(a) On olemassa $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $0 \leq |y_n| \leq |x_n|$ kaikilla $n \geq n_0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Tällöin $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Esimerkki 2.2.9 (a) Olkoon

$$x_n = \frac{3n^2 + n + 2}{1 - n^3}.$$

Jakamalla osamäärä n^3:lla saadaan

$$x_n = \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 1}.$$

Lauseen 2.2.3 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} - \lim_{n\to\infty}(-1)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Huomaa, että kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Esimerkkien 2.2.4 (a) ja 2.2.9 (a) metodilla, ts. jakamalla n:n korkeimmalla potenssilla ja käyttämällä Lausetta 2.2.3, kahden polynomin osamäärän (=rationaalifunktion) muodostamalle jonolle saadaan aina raja-arvo, jos polynomit ovat samaa astetta tai nimittäjä on korkeampaa astetta.

(b) Olkoon

$$x_n = \frac{-3n^3 + n + 2}{n^2 + 4}.$$

Jakamalla osamäärä n^2:lla saadaan

$$x_n = \frac{-3n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Tästä nähdään, että suurilla n:n arvoilla jono käyttäytyy olennaisesti kuten jono $y_n = -3n$ eli vähenee rajatta (raja-arvo on $-\infty$). Yleisesti, jos osoittajapolynomi on korkeampaa astetta kuin nimittäjä, raja-arvoksi saadaan joko $+\infty$ tai $-\infty$. Emme kuitenkaan tarkastele äärettömiä raja-arvoja tässä luvussa.

(c) Tarkastellaan jonoa

$$y_n := x^n,$$

missä $0 < x < 1$ on annettu luku. Osoitetaan raja-arvon määritelmästä, että

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Pidetään tässä tunnettuna, että luonnollinen logaritmi log on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan (asiaa tarkastellaan myöhemmin kurssilla). Tällä perusteella saadaan ekvivalenssi

$$|y_n - 0| = x^n < \varepsilon \iff \log x^n < \log\varepsilon \iff n\log x < \log\varepsilon \iff n > \frac{\log\varepsilon}{\log x},$$

sillä $\log x < 0$. Siis indeksiksi $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ kelpaa mikä hyvänsä $n_\varepsilon > \frac{\log\varepsilon}{\log x}$.

Esimerkki liittyy läheisesti geometrisen sarjan summakaavaan. Merkitään

$$a_n := 1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n.$$

Laventamalla lausekkeella $1 - x$ nähdään, että kaikilla $x > 0$, $x \neq 1$, pätee

$$a_n = \frac{1 - x + x - x^2 + \cdots x^{n-1} - x^n + x^n - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Tästä äärellisen *geometrisen summan* kaavasta saadaan esimerkiksi ratkaisu klassiselle shakkipeliin liityvälle ongelmalle: Jos ensimmäiseen shakkiruutuun pannaan yksi jyvä, toiseen kaksi, kolmanteen neljä jne., kuinka monta jyvää tarvitaan yhteensä? Sijoittamalla $x = 2$ ja $n = 63$ saadaan vastaukseksi

$$\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Jos $0 < x < 1$, niin summakaavasta saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

jolloin puhutaan *geometrisen sarjan summasta*. Geometrinen sarja esiintyy usein niin analyysin teoriassa kuin sovellutuksissakin.

Määritelmä 2.2.10 Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on

(a) *kasvava*, jos $x_n \le x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$,

(b) *vähenevä*, jos $x_n \ge x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Lukujono on *monotoninen*, jos se on joko kasvava tai vähenevä.

Esimerkki 2.2.11 Tarkastellaan jonoa $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$x_1 = 0 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 5, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Osoitetaan induktiolla, että $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava:

(1) Koska $x_1 = 0 \le x_2 = 5$, kasvavuusepäyhtälö pätee arvolla $n = 1$.

(2) Oletetaan, että $x_n \le x_{n+1}$, kun $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + 5 \ge \frac{1}{2}x_n + 5 = x_{n+1}$$

Siis kasvavuusepäyhtälö pätee myös arvolla $n + 1$.

Rajoitettujen jonojen ohella puhutaan ylhäältä ja alhaalta rajoitetusta lukujonosta. Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on *ylhäältä rajoitettu (vast. alhaalta rajoitettu)*, jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ siten, että $x_n \le M$ (vast. $x_n \ge M$) kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Lukujonojen yhteydessä reaalilukujen täydellisyysaksiomaa hyödynnetään usein seuraavasti:

Lause 2.2.12 Jos lukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} \in \mathbf{R}.$$

Todistus. Täydellisyysaksioman nojalla $G = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} \in \mathbf{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Supremumin määritelmän mukaan $G - \varepsilon$ ei ole joukon $E := \{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ yläraja, joten on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että $x_{n_\varepsilon} \in E$ ja

$$x_{n_\varepsilon} > G - \varepsilon.$$

Jos nyt $n > n_\varepsilon$, niin jonon kasvavuuden perusteella

$$x_{n_\varepsilon} \leq x_{n_\varepsilon + 1} \leq \cdots \leq x_n$$

ja siis

$$G - \varepsilon < x_n \leq G$$

kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Näin ollen $|x_n - G| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ eli väite pätee. □

Esimerkki 2.2.13 Olkoon $x_n = \frac{n}{n+1}$. Tällöin ekvivalenssista

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff n(n+2) \leq (n+1)^2 \iff n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$$

nähdään, että $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava. Koska $x_n \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, niin $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on ylhäältä rajoitettu. Lauseen 2.2.12 nojalla

$$\sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} = \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Esimerkki 2.2.14 (a) Reaalilukujen desimaaliesityksen idea perustuu Lauseeseen 2.2.12. Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$0.1, 0.10, 0.101, 0.1010, 0.10100, 0.101001, 0.1010010, 0.10100100, 0.101001000, \ldots,$$

missä desimaaliesitykseen lisätään ensimmäisen ykkösen jälkeen yksi nolla, toisen ykkösen jälkeen kaksi nollaa, kolmannen ykkösen jälkeen kolme nollaa jne. Tässä äärellisellä desimaalimerkinnät ovat rationaalilukuja; esimerkiksi

$$0.101 := 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-3}.$$

Selvästi $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava. Toisaalta

$$0 \leq x_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 = \frac{1}{9}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$, joten $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on myös rajoitettu. Lauseen 2.2.12 mukaan

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

on olemassa. Mainittakoon, että x on irrationaalinen. On nimittäin mahdollista todistaa, että äärettömän pitkän desimaaliesityksen antama raja-arvo on rationaalinen jos ja vain jos desimaaliesitys on päättyvä (kertoimet nollia äärellisen monen indeksin jälkeen) tai jaksollinen (äärellisen monen indeksin jälkeen samat kertoimet toistuvat loputtomiin).

Yo. esimerkki on hieman keinotekoinen. Yleensä ei ole tiedossa mitään sääntöä, jota irrationaaliluvun desimaaliesitys noudattaisi. Esimerkiksi lukujen e ja π desimaaliesityksille ei tunneta mitään sääntöä.

(b) Olkoon

$$x_n := 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on selvästi kasvava ja vertaamalla sitä suppenevassa geometrisessa sarjassa esiintyvään lukujonoon voidaan päätellä, että lukujono on rajoitettu (tarkka perustelu sivuutetaan). Raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} x_n$ kutsutaan *Neperin luvuksi* e. Neperin luku saadaan myös kasvavan jonon

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

raja-arvona, ks. Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1, ss. 45–47.

Lauseen 2.2.12 vastine pätee luonnollisesti infimumille. Todistuksen idea on sama.

Lause 2.2.15 Jos lukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 2.2.16 Määritellään jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rekursiivisesti asettamalla

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

Induktiolla on helppo todeta, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee $x_n \geq 1$. Siis $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on alhaalta rajoitettu. Toisaalta jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on vähenevä, sillä kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \leq x_n,$$

koska $x_n \geq 1$. Lauseen 2.2.15 nojalla on olemassa $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Edelleen ottamalla raja-arvot puolittain ehdossa $x_{n+1}^2 = x_n$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Lauseen 2.2.3 kohdan (c) nojalla $x^2 = x$ eli $x = 0$ tai $x = 1$. Tässä $x = 0$ ei ole mahdollinen, joten $x = 1$.

Milloin jono hajaantuu?

Tarkastellaan lopuksi sitä, kuinka perustellaan jonon hajaantuminen. Luonnollisesti hajaantumista voitaisiin tarkastella kääntämällä raja-arvon määritelmä negaatiokseen. Seuraava *Cauchyn ehto* on kuitenkin tehokkaampi tapa, sen avulla voidaan hoitaa kaikki mahdolliset raja-arvot yhdellä kertaa.

Lause 2.2.17 Jos lukujonolla $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on raja-arvo x, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $n_\varepsilon > 0$ siten, että $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Jos siis $n, m \geq n_\varepsilon$, niin kolmioepäyhtälön mukaan

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lauseen 2.2.17 epsilon-ehto ei päde, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että jokaista $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ vastaa $m, n \geq n_\varepsilon$, joille

$$|x_n - x_m| \geq \varepsilon.$$

Tätä käytetään hyväksi seuraavasti:

Esimerkki 2.2.18 (a) Tarkastellaan jonoa $x_n = n$. Valitaan $\varepsilon = 1$. Nyt kaikilla $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ on $|x_{n_\varepsilon+1} - x_{n_\varepsilon}| = 1 \geq \varepsilon$, joten Lauseen 2.2.17 nojalla raja-arvoa ei ole.

(b) Esimerkiksi jonolla

$$x_n = (-1)^n$$

ei ole raja-arvoa. Jos nimittäin valitaan $\varepsilon = 1$, niin kaikilla $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ pätee

$$|x_n - x_{n_\varepsilon+1}| = 2 > \varepsilon,$$

eli Lauseen 2.2.17 ehto ei ole voimassa. Siis raja-arvoa ei ole.

(c) Osoitetaan vielä, että jonolla

$$x_n = \sin n$$

ei ole raja-arvoa. Olkoon $\varepsilon = 1$ ja $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa $m, n \in \mathbf{N}$ siten, että $m \in [2\pi n_\varepsilon + \frac{\pi}{6}, 2\pi n_\varepsilon + \frac{5\pi}{6}]$ ja $n \in [2\pi n_\varepsilon + \frac{7\pi}{6}, 2\pi n_\varepsilon + \frac{11\pi}{6}]$. Nyt $m, n \geq n_\varepsilon$ ja $\sin m \geq \frac{1}{2}$, $\sin n \leq -\frac{1}{2}$, joten

$$|\sin m - \sin n| \geq 1 = \varepsilon.$$