Analyysi I

Visa Latvala

26. lokakuuta 2004

Sisältö

3 Reaalimuuttujan funktiot

3.1 Peruskäsitteitä

Olkoot $A \subset \mathbf{R}$ ja $B \subset \mathbf{R}$. *Kuvaus (funktio)* $f : A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ yksikäsitteisen alkion $f(x) \in B$. Lukua $f(x)$ kutsutaan luvun x *kuvaksi*. Jos $f(x) = y$, lukua x sanotaan luvun y *alkukuvaksi*. Joukkoa A kutsutaan *määrittelyjoukoksi (lähtöjoukoksi)* ja joukkoa B kutsutaan *maalijoukoksi*.

Esimerkki Esimerkiksi sääntö $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, määrittelee kuvauksen. *Usein maalijoukkona käytetään koko reaalilukujoukkoa* $\mathbf{R}$ vaikka kaikkia arvoja ei saataisikaan.

Jos $f : A \to B$ on kuvaus sekä $A_1 \subset A$ ja $B_1 \subset B$, niin B:n osajoukkoa

$$f(A_1) := \{\, y \in B \mid y = f(x) \text{ jollekin } x \in A_1 \,\}$$

kutsutaan A_1:n *kuvajoukoksi* ja A:n osajoukkoa

$$f^{-1}(B_1) := \{\, x \in A \mid f(x) \in B_1 \,\}$$

kutsutaan B_1:n *alkukuvajoukoksi*. Funktion $f : A \to B$ *kuvaajalla* tarkoitetaan tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoa

$$\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A,\ y = f(x) \,\}.$$

Kuvaaja voidaan usein (mutta ei aina) piirtää joko käsin tai tietokoneella (analyysin kursseilla I-III käytetään MAPLE-ohjelmaa).

Esimerkki Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kuvaus $f(x) = x^2$ ja olkoot $A_1 =]-\frac{1}{2}, 1[$, $B_1 = \{2, 3\}$. Tällöin $f(A_1) = [0, 1[$ ja $f^{-1}(B_1) = \{\, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3} \,\}$.

Injektiivisyys, surjektiivisuus ja bijektiivisyys

Määritelmä 3.1.1 Kuvaus $f : A \to B$ on

(a) *injektio*, jos kaikilla $x, y \in A$, $x \neq y$, pätee $f(x) \neq f(y)$,

(b) *surjektio*, jos jokaista $y \in B$ vastaa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$,

(c) *bijektio*, jos f on sekä injektio että surjektio.

Esimerkki Kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^2,$$

ei ole injektio (sillä $f(-1) = f(1)$) eikä surjektio (sillä $f(x) \neq -1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ eli luvulla -1 ei ole alkukuvaa).

Surjektiivisuus tarkoittaa siis sitä, että jokaisella maalijoukon alkiolla on ainakin yksi alkukuva määrittelyjoukossa. Injektiivisyys puolestaan sitä, että jokaisella maalijoukon alkiolla on korkeintaan yksi alkukuva määrittelyjoukossa. Bijektiivisyys tarkoittaa siis sitä, että jokaisella maalijoukon alkiolla on täsmälleen yksi alkukuva määrittelyjoukossa.

Huomautus 3.1.2 Epäsuoran todistuksen version I mukaisesti kuvaus $f : A \to B$ on injektio täsmälleen silloin kun implikaatio

$$x, y \in A \text{ ja } f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \tag{1}$$

pätee. Koska implikaatio $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ pätee kaikille kuvauksille, f on injektio täsmälleen silloin kun ekvivalenssi

$$x = y \iff f(x) = f(y)$$

pätee kaikille $x, y \in A$.

Esimerkki 3.1.3 (a) Kuvaus $f(x) = x^2$ on injektio joukossa $A := \{ x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \}$. Jos nimittäin $x, y \in A$, $x \neq y$, niin joko $x < y$ tai $y < x$. Ensimmäisessä tapauksessa $x^2 < y^2$ ja jälkimmäisessä tapauksessa $y^2 < x^2$. Joka tapauksessa $f(x) = x^2 \neq y^2 = f(y)$.

(b) Kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$, on injektio. Todistetaan injektiivisyys ehtoa (1) hyödyntäen. Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(x) = 2x + 3 = 2y + 3 = f(y).$$

Tästä saadaan $2x = 2y$ ja edelleen $x = y$. Siis f on injektio.

(c) Olkoon $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$ kuvaus

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

Mikä on kuvajoukko $f(\mathbf{R} \setminus \{-1\})$? Onko f injektio määrittelyjoukossaan? Tutkitaan mielivaltaisen luvun $y \in \mathbf{R}$ alkukuvia. Jos $y \in \mathbf{R}$, niin olettaen $x \neq -1$ voidaan kirjoittaa

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1 + x} = y \iff y + yx = x \iff y = x(1 - y).$$

Jos lisäksi $y \neq 1$, oikeanpuoleinen yhtälö on edelleen ekvivalentti yhtälön

$$x = \frac{y}{1 - y}$$

kanssa. Siis jokaisella $y \neq 1$ on yksikäsitteinen alkukuva $\frac{y}{1-y}$. Luvulla 1 ei ole alkukuvaa, sillä jos olisi $\frac{x}{1+x} = 1$, niin olisi myös $1 + x = x$, mikä on mahdotonta. Siis

$$f(\mathbf{R} \setminus \{-1\}) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

eli $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}$ on surjektio.

Injektiivisyys on surjektiivisuutta olennaisempi ominaisuus:

Huomautus 3.1.4 Olkoon $f : A \to B$ injektio. Tällöin kuvaus $f : A \to f(A)$ on sekä injektio että surjektio, sillä jokaista $y \in f(A)$ vastaa kuvajoukon määritelmän mukaan $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Siis kuvaus $f : A \to f(A)$ on bijektio, jos kuvaus $f : A \to B$ on injektio.

Tällä kurssilla injektiivisyys päätellään yleensä aidon monotonisuuden avulla:

Määritelmä 3.1.5 Kuvaus $f : A \to B$ on

(a) *kasvava* (vast. *aidosti kasvava*)), jos kaikilla $x, y \in A$, $x < y$, pätee $f(x) \leq f(y)$ (vast. $f(x) < f(y)$),

(b) *vähenevä* (vast. *aidosti vähenevä*)), jos kaikilla $x, y \in A$, $x < y$, pätee $f(x) \geq f(y)$ (vast. $f(x) > f(y)$),

(c) *monotoninen* (vast. *aidosti monotoninen*), jos f on kasvava tai vähenevä (vast. aidosti kasvava tai aidosti vähenevä).

Esimerkki 3.1.6 Olkoon $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = x^7,$$

missä $\mathbf{R}_+ = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0 \}$. Osoitetaan, että f on aidosti kasvava. Tätä varten, olkoot $x, y \in \mathbf{R}_+$, $0 \leq x < y$. Kertomalla 7 epäyhtälöä $x < y$ puolittain (ks. Lause 1.4.5 (n)) saadaan $x^7 < y^7$. Siis f on aidosti kasvava. Samalla tavalla päätellään yleisesti, että kuvaus $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = x^n$, on aidosti kasvava kun $n \in \mathbf{N}$ on kiinteä.

Lemma 3.1.7 Olkoon $f : A \to B$ aidosti monotoninen. Tällöin f on injektio.

Todistus. Oletetaan, että f on aidosti kasvava. Injektiivisyyden todistamiseksi olkoot $x, y \in A$, $x \neq y$. Tällöin joko $x < y$ tai $x > y$. Jos $x < y$, niin aidon kasvavuuden määritelmän mukaan $f(x) < f(y)$. Jos taas $x > y$, niin aidon kasvavuuden määritelmän mukaan $f(x) > f(y)$. Joka tapauksessa $f(x) \neq f(y)$ eli f on injektio. Aidosti vähenevän funktion injektiivisyys todetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). $\square$

Esimerkki 3.1.8 Tutkitaan kuvausta $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

Nyt f ei ole injektio määrittelyjoukossaan, sillä esimerkiksi luvulla $\frac{1}{8}$ on kaksi alkukuvaa;

$$f(x) = \frac{1}{8} \iff 8(x-1) = x^2 \iff x^2 - 8x + 8 = 0 \iff x = 4 \pm 2\sqrt{2}.$$

Jos kuitenkin funktiota f tarkastellaan esimerkiksi välillä $]0, 1[$, niin f on aidosti kasvavana injektio. Nimittäin kaikilla $0 < x < y < 1$ pätee $x^2 < y^2$ ja $x - 1 < y - 1$. Edelleen $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{y^2}$ ja

$$\frac{x-1}{x^2} < \frac{x-1}{y^2} < \frac{y-1}{y^2}.$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö saadaan epäyhtälöstä $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{y^2}$ kertomalla negatiivisella luvulla $x - 1$.

Vaihtoehtoisesti voitaisiin lähteä ehdosta

$$f(x) = f(y) \iff (x-1)y^2 = (y-1)x^2,$$

josta laskemalla sulut auki ja ottamalla yhteisen tekijän saadaan $(x - y)(x + y - xy) = 0$. Nyt välttämättä $x = y$, sillä $x + y > xy$ kaikilla $x, y \in]0, 1[$.

Huomautus Myöhemmin nähdään, että alkeisfunktioiden aito monotonisuus on kätevintä päätellä funktion derivaatan merkin avulla. Tässä vaiheessa emme kuitenkaan käytä derivaattaa tarkasteluissa.

Käänteiskuvaus

Olkoon $f : A \to B$ injektio. Tällöin jokaista kuvajoukon $f(A)$ alkiota $y \in f(A)$ vastaa täsmälleen yksi alkukuva lähtöjoukossa A (Huomautus 3.1.2 (a)). Tälle alkukuvalle käytetään merkintää $f^{-1}(y)$. Nyt sääntö $y \mapsto f^{-1}(y)$ määrittelee kuvauksen $f(A) \to A$. Tätä kuvausta sanotaan kuvauksen f *käänteiskuvaukseksi* ja sille käytetään merkintää f^{-1}. Jos $f : A \to B$ on bijektio, käänteiskuvauksen f^{-1} määrittelyjoukko on B ja maalijoukko A.

Esimerkki 3.1.9 Jos bijektio $f : A \to B$ on määritelty analyyttisella lausekkeella, käänteiskuvauksen lauseke saadaan selville mikäli yhtälöstä $f(x) = y$, $y \in B$, voidaan ratkaista x yksikäsitteisesti y:n avulla.

(a) Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Tässä tapauksessa kuvauksen bijektiivisyys ja käänteiskuvauksen lauseke voidaan todeta yhdellä päättelyllä. Pyritään todistamaan, että kyseessä on surjektio. Tätä varten, olkoon $y \in \mathbf{R}$. Asetetaan $f(x) = 2x + 3 = y$ ja ratkaistaan x y:n funktiona. Koska

$$2x + 3 = y \iff 2x = y - 3 \iff x = \frac{1}{2}(y - 3), \tag{2}$$

havaitaan, että $\frac{1}{2}(y-3)$ on luvun $y \in \mathbf{R}$ alkukuva. Mutta ekvivalenssiketju (2) osoittaa, että $\frac{1}{2}(y-3)$ on myöskin luvun $y \in \mathbf{R}$ *ainoa* alkukuva. Tämä riittää perustelemaan myös injektiivisyyden ja havaitaan, että *injektiivisyyden erillinen todistaminen on tässä tapauksessa tarpeetonta.*

Erityisesti käänteiskuvaus $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ saadaan säännöstä $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-3)$. Tässä käänteiskuvauksen muuttujaa voitaisiin merkitä y:llä, mutta siihen ei ole erityistä tarvetta. Yleensä kuvauksen ja sen käänteiskuvauksen lausekkeissa käytetäänkin samaa muuttujamerkintää.

(b) Tarkastellaan Esimerkin 3.1.3 kohdan (c) kuvausta $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Nyt kaikilla $y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$) pätee ekvivalenssi

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x} = y \iff y + yx = x \iff y = x(1-y) \iff x = \frac{y}{1-y}.$$

Siis jokaisella $y \neq 1$ on yksikäsitteinen alkukuva $\frac{y}{1-y}$. Koska luvulla 1 ei ole alkukuvaa (Esimerkki 3.1.3 (c)), on f välttämättä bijektio joukosta $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ joukkoon $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. Käänteiskuvaus $f^{-1} : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$ saadaan yhtälöstä

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

(c) Määrätään käänteiskuvaus kuvaukselle $f :]0, +\infty[\to] -\infty, 0[$,

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Olkoon $y < 0$. Tällöin

$$f(x) = y \iff -\frac{1}{x^2} = y \iff x^2 = -\frac{1}{y} \iff x = \pm\sqrt{-\frac{1}{y}}.$$

Tässä miinusmerkki ei käy, sillä määrittelyjoukko on $]0, +\infty[$. Siis jokaisella $y < 0$ on yksikäsitteinen alkukuva $x = \sqrt{-\frac{1}{y}}$ joukossa $]0, +\infty[$. Käänteiskuvaus on $f^{-1} :] -\infty, 0[\to]0, +\infty[$,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{x}}.$$

Huomautus 3.1.10 (Käänteiskuvauksen geometrinen tulkinta) Jos $f : A \to B$ on bijektio, niin funktion f kuvaaja ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen. Nimittäin f:n kuvaaja on joukko

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja on joukko

$$\{ (f(x), x) \mid x \in A \}.$$

Toisaalta pisteet $(x_0, f(x_0))$ ja $(f(x_0), x_0)$ ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen kaikilla $x_0 \in A$:

(1). Pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(f(x_0), x_0)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa suoraan $y = x$ nähden, sillä näiden pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(x_0) - x_0}{x_0 - f(x_0)} = -1.$$

Huomaa, että suorat l_1 ja l_2 ovat kohtisuorassa täsmälleen silloin kun niiden kulmakertoimille pätee $k_1 k_2 = -1$.

(2). Pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(f(x_0), x_0)$ välisen janan keskipiste

$$\left(\frac{x_0 + f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0) + x_0}{2} \right) = \left(\frac{x_0 + f(x_0)}{2}, \frac{x_0 + f(x_0)}{2} \right)$$

sijaitsee suoralla $y = x$.

Kuvausten yhdistäminen

Olkoot A, B ja C epätyhjiä $\mathbf{R}$:n osajoukkoja ja olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ kuvauksia. Tällöin sääntö

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in A,$$

määrittelee kuvauksen $g \circ f : A \to C$ (*yhdistetty kuvaus*).

Esimerkki 3.1.11 Olkoot $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kuvaukset

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = |x|.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1, \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \\
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(x^2 + 2x + 1) = |x^2 + 2x + 1|.
\end{aligned}$$

Siis kuvausten yhdistäminen *ei ole vaihdannainen* operaatio eli *voi olla*

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

Huomaa, että yhdistettäessä useampi kuin kaksi kuvausta ei tarvita sulkuja määräämään laskujärjestystä, koska kuvausten yhdistäminen *on liitännäinen* operaatio; yleisesti pätee

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \\
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)),
\end{aligned}$$

eli $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (ovat samat kuvaukset).

Huomautus 3.1.12 Olkoon $f : A \to B$ bijektio. Tällöin

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{kaikilla } x \in B$$

ja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{kaikilla } x \in A$$

suoraan käänteiskuvauksen määritelmän mukaan. Näitä ehtoja voi käyttää sen tarkastamiseen, onko käänteiskuvauksen lauseke oikein. Esimerkiksi kuvauksille $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ja $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ pätee

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(\frac{x}{1-x}) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 + (\frac{x}{1-x})} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x+x}{1-x}} = x, \quad x \neq 1,$$

ja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\frac{x}{1+x}) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - (\frac{x}{1+x})} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x-x}{1+x}} = x, \quad x \neq -1.$$

Lause 3.1.13 Olkoon $f : A \to B$ kuvaus.

(a) Jos f on aidosti kasvava, niin $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$,

(b) Jos f on aidosti vähenevä, niin $x < y$ jos ja vain jos $f(x) > f(y)$.

Todistus. Todistetaan malliksi kohta (a), kohta (b) jätetään harjoitustehtäväksi. Implikaatio vasemmalta oikealle pätee määritelmän mukaan. Käänteisen implikaation todistamiseksi, tehdään antiteesi $x \geq y$. Tapauksessa $x = y$ pätee $f(x) = f(y)$ (ristiriita) ja tapauksessa $x > y$ pätee aidon kasvavuuden nojalla $f(x) > f(y)$ (ristiriita). $\square$

Esimerkki 3.1.14 Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aidosti vähenevä. Ratkaistaan epäyhtälö

$$f(\frac{5x-3}{4}) < f(\frac{x}{2} - 1).$$

Lemman 3.1.13 kohdan (b) nojalla epäyhtälö pätee jos ja vain jos

$$\frac{5x-3}{4} > \frac{x}{2} - 1 \iff 5x - 3 > 2x - 4 \iff 3x > -1 \iff x > -\frac{1}{3}.$$

Huomaa, että tarkasteltavan epäyhtälön kannalta f:n lauseke on epärelevantti.

Lause 3.1.15 Olkoon $f : A \to B$ kuvaus.

(a) Jos f on aidosti kasvava, niin käänteiskuvaus $f^{-1} : f(A) \to A$ on aidosti kasvava,

(b) Jos f on aidosti vähenevä, niin käänteiskuvaus $f^{-1} : f(A) \to A$ on aidosti vähenevä.

Todistus. Todistetaan malliksi kohta (b). Koska f on aidosti vähenevä, se on injektio (Lemma 3.1.7). Näin ollen $f : A \to f(A)$ on bijektio ja siis käänteiskuvaus $f^{-1} : f(A) \to A$ on olemassa. Olkoot $x', y' \in f(A)$. Tällöin on olemassa luvut $x, y \in A$ siten, että $f(x) = x'$ ja $f(y) = y'$. Käänteiskuvauksen määritelmän mukaan $f^{-1}(x') = x$ ja $f^{-1}(y') = y$. Lemman 3.1.13 (b) nojalla $x < y$ jos ja vain jos $f(x) > f(y)$. Siis $f^{-1}(x') < f^{-1}(y')$ jos ja vain jos $x' > y'$. Erityisesti $f^{-1} : f(A) \to A$ on aidosti vähenevä. □

Esimerkki 3.1.16 (Juurifunktio) Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja olkoon $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^n,$$

missä $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$. Tällöin f on aidosti kasvavana injektio (Esimerkki 3.1.6). Erityisesti kuvaus $f : \mathbf{R}_+ \to f(\mathbf{R}_+)$ on bijektio. Bolzanon lauseen avulla todetaan kätevimmin, että $f(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}_+$ (tarkastellaan myöhemmin). Näin ollen $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ on bijektio, jonka käänteiskuvaukselle $f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ (*n:s juuri*) käytetään merkintää

$$f^{-1}(x) =: \sqrt[n]{x}.$$

Olkoon $n \in \mathbf{N}$ pariton. Tällöin sääntö $f(x) = x^n$ määrittelee injektion $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Tämän perustelemiseksi osoitetaan, että f on aidosti kasvava joukossa $\mathbf{R}$. Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$. Jos $0 \leq x < y$, niin $x^n < y^n$. Jos $x < 0 \leq y$, niin $x^n < 0 \leq y^n$, koska n on pariton. Jos lopuksi $x < y < 0$, niin $0 < -y < -x$ ja n:n parittomuuden nojalla

$$-y^n = (-y)^n < (-x)^n = -x^n.$$

Näin ollen $x^n < y^n$ eli $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on injektio. Pitäen tunnettuna, että $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ (seuraa jälleen Bolzanon lauseesta) päätellään, että f on aidosti kasvava bijektio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Käänteiskuvaukselle käytetään edelleen merkintää

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Lemma 3.1.17 (a) Juurifunktio on aidosti kasvava kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

(b) Kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja $x \in \mathbf{R}_+$ pätee

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{x^n} = x.$$

(c) Jos $n \in \mathbf{N}$ on pariton, niin kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee

$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}.$$

Todistus. Kohta (a) pätee Lemman 3.1.15 (a) nojalla ja kohtien (b), (c) väitteet

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \tag{3}$$

ovat voimassa Huomautuksen 3.1.12 mukaan. Kohdassa (c) ominaisuuden $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Esimerkki 3.1.18 (a) Ratkaistaan epäyhtälö

$$(x^2+2)^{\frac{1}{4}} > (x^2+3x)^{\frac{1}{4}}.$$

Neljäs juuri on määritelty vain ei-negatiivisille luvuille. Siksi vaaditaan, että $x^2 + 3x = x(x+3) \geq 0$ eli $x \leq -3$ tai $x \geq 0$.

Oletetaan, että $x \leq -3$ tai $x \geq 0$. Juurifunktion aidon kasvavuuden nojalla (Lemma 3.1.13)

$$(x^2+2)^{\frac{1}{4}} > (x^2+3x)^{\frac{1}{4}} \iff x^2+2 > x^2+3x \iff 2 > 3x \iff x < \frac{2}{3}.$$

Siispä kysytyn epäyhtälön ratkaisut ovat $x \leq -3$ tai $0 \leq x < \frac{2}{3}$.

(b) Olkoon $f : \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{3x}{x+2}}.$$

Määrätään f:n käänteiskuvaus. Tätä varten, olkoon $y \in \mathbf{R}$. Koska kuvaus $x \mapsto x^5$ on injektio, voidaan kirjoittaa ekvivalenssiketju

$$\sqrt[5]{\frac{3x}{x+2}} = y \iff \frac{3x}{x+2} = y^5 \iff 3x = y^5(x+2) \iff x(3-y^5) = 2y^5 \iff x = \frac{2y^5}{3-y^5}$$

olettaen, että $x \neq -2$ ja että $y \neq \sqrt[5]{3}$. Siis jokaisella $y \neq \sqrt[5]{3}$ on yksikäsitteinen alkukuva $\frac{2y^5}{3-y^5}$. Ekvivalenssiketjun yhtälöstä $x(3-y^5) = 2y^5$ nähdään, että luvulla $y = \sqrt[5]{3}$ ei voi olla alkukuvaa. Näin ollen f on bijektio joukosta $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ joukkoon $\mathbf{R} \setminus \{\sqrt[5]{3}\}$ ja käänteiskuvaus on muotoa

$$f^{-1}(x) = \frac{2x^5}{3-x^5}.$$

3.2 Raja-arvon määritelmä

Differentiaali- ja integraalilaskennan uranuurtajina pidetään Sir Isaac Newtonia (s. 1642) ja Gottfried Wilhelm Leibnizia (s. 1646). Pitkälle 1800-luvulle saakka differentiaali- ja integraalilaskennan kehitystä haittasi se, että raja-arvon käsitteelle ei ollut olemassa kunnollista määritelmää. Kunnia raja-arvon epsilon-määritelmän keksimisestä annetaan yleensä Augustin-Louis Cauchy'lle (s. 1789).

Esimerkki 3.2.1 Painovoimalain mukaan kappale putoaa vapaassa pudotuksessa siten, että ajassa $t > 0$ kuljettu matka $s(t)$ saadaan kaavasta

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

missä g on gravitaatiovakio, $g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$. Vapaalla pudotuksella tarkoitetaan sitä, että ainoa vaikuttava voima on maan vetovoima. Esimerkiksi pudotettaessa raskas kivi alas jyrkänteeltä, ensimmäisten sekuntien aikana ilmanvastuksen merkitys on olematon ja kyse on olennaisesti vapaasta pudotuksesta.

Miten saadaan nopeus esimerkiksi hetkellä $t = 2$ sekuntia? Tunnetusti keskimääräinen nopeus saadaan kaavasta $v = \frac{s}{t}$, joten erotusosamäärä

$$\frac{s(2) - s(t)}{2 - t} = \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

on likiarvo hetkelliselle nopeudelle hetkellä $t = 2$ mikäli $t \neq 2$ on likimäärin 2. Likiarvo on sitä parempi, mitä pienempi on väli $t - 2$. Tämän vuoksi on luonnollista tulkita nopeus hetkellä $t = 2$ erotusosamäärän raja-arvoksi, kun t lähestyy ajanhetkeä 2.

Raja-arvon määritelmää varten sovitaan ensin, mitä tarkoitetaan pisteen ympäristöllä. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $r > 0$. Tällöin *pisteen x_0 r-säteisellä (avoimella) ympäristöllä $B(x_0, r)$* tarkoitetaan avointa väliä

$$B(x_0, r) = \{\, x \in \mathbf{R} \;\big|\; |x - x_0| < r \,\} =]x_0 - r, x_0 + r[$$

ja *pisteen x_0 r-säteisellä punkteeratulla ympäristöllä $B'(x_0, r)$* tarkoitetaan punkteerattua avointa väliä

$$B'(x_0, r) = \{\, x \in \mathbf{R} \;\big|\; 0 < |x - x_0| < r \,\} =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}.$$

Määriteltäessä funktion f raja-arvoa pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$ vaatimuksena on, että funktio f on määritelty *jossakin* pisteen x_0 punkteeratussa ympäristössä $B'(x_0, r) := B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$. Esimerkiksi derivaatan määritelmän yhteydessä erotusosamäärää ei ole määritelty "nollaerotukselle", vrt. Esimerkki 3.2.1 yllä.

Määritelmä 3.2.2 Funktiolla $f : B'(x_0, r) \to \mathbf{R}$ on pisteessä x_0 *raja-arvo* $a \in \mathbf{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Huomautus Määritelmästä seuraa, että raja-arvo on yksikäsitteinen. Tällä tarkoitetaan implikaatiota: Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, niin $a = b$. Tehdään antiteesi $a \neq b$ ja oletetaan $a < b$. Valitaan $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ ja sovelletaan raja-arvon määritelmää sekä lukuun a että lukuun b. Löydetään $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} x \in B'(x_0, \delta_1) \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \tfrac{b-a}{2} < f(x) < a + \tfrac{b-a}{2}, \\ x \in B'(x_0, \delta_2) \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \tfrac{b-a}{2} < f(x) < b + \tfrac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Jos nyt $\delta := \min\{\, \delta_1, \delta_2 \,\}$ ja $x \in B'(x_0, \delta)$, kummatkin arviot oikealla puolella ovat voimassa, mikä sisältää ristiriidan.

Esimerkki 3.2.3 (a) Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ ja olkoon $f(x) = a \in \mathbf{R}$ kaikilla $x \neq x_0$ (f on vakiofunktio). Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt $|f(x) - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ kaikilla $x \neq x_0$, joten luvuksi δ kelpaa jokainen positiiviluku.

(b) Olkoon $f(x) = x$ kaikilla $x \neq x_0$. Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0 \quad \text{eli} \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) - x_0) = 0.$$

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ kun $0 < |x - x_0| < \varepsilon$. Voidaan siis valita $\delta = \varepsilon$. Myös jokainen $\delta < \varepsilon$ käy.

(c) Yleisesti raja-arvon määritelmästä on välittömästi selvää, että

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x\to x_0} (f(x) - a) = 0.$$

Monissa tapauksissa raja-arvon määritelmän käyttö voidaan korvata seuraavalla kuristusperiaatteella:

Lause 3.2.4 (Kuristusperiaate) Oletetaan, että funktioille $f, g : B'(x_0, r) \to \mathbf{R}$ pätee:

(a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,

(b) On olemassa luvut $a \in \mathbf{R}$ ja $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| \leq M|g(x)|$$

kaikilla $x \in B'(x_0, r)$.

Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|g(x)| = |g(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$$

kaikilla x, $0 < |x - x_0| < \delta$. Siispä (oletus (b))

$$|f(x) - a| \leq M|g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

kaikilla x, $0 < |x - x_0| < \delta$. $\square$

Huomautus Lauseessa 3.2.4 positiivilukujen r ja M suuruudella ei ole itse raja-arvoväitteen kannalta mitään merkitystä.

Esimerkki 3.2.5 Lauseen 3.2.4 avulla voidaan perustella, että polynomille $P(x) = x^n$ pätee
$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$
kaikilla $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{N}$.

(a) Olkoon $f(x) = x^2$. Nyt
$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2|$$
kun $0 < |x - 2| < 1$. Siis Lauseen 3.2.4 oletukset pätevät, kun valitaan $r = 1$, $M = 5$, $g(x) = x - 2$ ja $a = 4$. Lauseen 3.2.4 nojalla
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

(b) Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, ja olkoon $x_0 = \pi$. Koska π on polynomin $x^3 - \pi^3$ nollakohta, saadaan jakamalla $x^3 - \pi^3$ polynomilla $x - \pi$ esitys
$$x^3 - \pi^3 = (x - \pi)(x^2 + \pi x + \pi^2).$$
Jos nyt $r = \frac{1}{2}$ ja $x \in B'(\pi, \frac{1}{2})$, saadaan kolmioepäyhtälön nojalla arvio
$$\begin{aligned} |x^3 - \pi^3| &= |x - \pi||x^2 + \pi x + \pi^2| \le |x - \pi|(|x^2 + \pi x| + |\pi^2|) \\ &\le |x - \pi|(|x^2| + |\pi x| + |\pi^2|) \le |x - \pi|(4^2 + 4\pi + \pi^2). \end{aligned}$$
Siis voidaan valita $M = 4^2 + 4\pi + \pi^2$ ja $g(x) = x - \pi$. Jos lukua r pienennetään, voidaan myös lukua M hieman pienentää. Tällä ei kuitenkaan ole raja-arvotuloksen kannalta merkitystä. Lauseen 3.2.4 nojalla
$$\lim_{x \to \pi} x^3 = \pi^3.$$

(c) Olkoon $f(x) = x^n$, missä $n \in \mathbf{N}$ ja olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että
$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n.$$
Koska x_0 on polynomin $P(x) = x^n - x_0^n$ nollakohta, niin Lemman 1.2.6 mukaan on olemassa polynomi A, $\deg A = n - 1$, siten, että $x^n - x_0^n = (x - x_0)A(x)$. Merkitsemällä
$$A(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
voidaan kirjoittaa
$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0||a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0|.$$
Jos valitaan $r = 1$, kaikilla $x \in B'(x_0, 1)$ pätee
$$\begin{aligned} |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| &\le |a_{n-1}x^{n-1}| + \cdots + |a_1 x| + |a_0| \\ &\le (|x_0| + 1)^{n-1}|a_{n-1}| + \cdots (|x_0| + 1)|a_1| + |a_0|. \end{aligned}$$
Tämä seuraa induktiolla kolmioepäyhtälöstä (harjoitustehtävä). Valitsemalla
$$M = (|x_0| + 1)^{n-1}|a_{n-1}| + \cdots (|x_0| + 1)|a_1| + |a_0|$$
todetaan, että
$$|x^n - x_0^n| \le M|x - x_0|$$
kaikilla $x \in B'(x_0, 1)$. Lauseen 3.2.4 nojalla
$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n.$$

Esimerkki 3.2.6 (a) Olkoon
$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},$$
missä $x \neq 0$. Tällöin
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$
sillä
$$|f(x)| \leq x^2 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$
Huomaa, että funktiolla $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ ei ole raja-arvoa origossa. Tämä perustellaan Esimerkissä 3.3.8.

(b) Olkoon
$$h(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x < 2 \\ -10^7, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$$
ja olkoon $f(x) = (x-2)h(x)$. Tällöin $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ Lauseen 3.2.4 nojalla, sillä

(a) $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$,

(b) $|f(x)| \leq 10^7|x-2|$.

3.3 Raja-arvon laskusääntöjä

Funktion raja-arvolle pätevät samat summaa, tuloa ja osamäärää koskevat laskusäännöt kuin lukujonon raja-arvolle.

Lause 3.3.1 Olkoot $f : B'(x_0, r_1) \to \mathbf{R}$ ja $g : B'(x_0, r_2) \to \mathbf{R}$ funktioita siten, että
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$
Tällöin

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$,

(ii) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = ca$ kaikilla $c \in \mathbf{R}$,

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$,

(iv) Jos $b \neq 0$, niin $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) jätetään harjoitustehtäväksi.

(iii) Raja-arvon määritelmästä seuraa, että on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että $|g(x)| \leq |b| + 1$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta_1)$. Valitaan $\delta_2 > 0$ ja $\delta_3 > 0$ siten, että
$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad \text{ja} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}.$$
Jos nyt $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, niin kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla
$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| = |g(x)(f(x) - a) + a(g(x) - b)| \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \leq (|b|+1) \cdot \tfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)} + |a| \cdot \tfrac{\varepsilon}{2(|a|+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen.

(iv) Todistetaan ensin implikaatio

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 1. \tag{4}$$

Tätä varten, olkoon $0 < \varepsilon < 1$ ja valitaan $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$. Tällöin arvoilla $x \in B'(x_0, \delta)$ pätee $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$ eli $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$. Näin ollen kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ on voimassa

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - 1\Big| = \Big|\frac{1 - f(x)}{f(x)}\Big| = \frac{|1 - f(x)|}{|f(x)|} < 2|1 - f(x)| < \varepsilon,$$

mikä todistaa väitteen (4). Ehtoa (4) käyttäen yleinen väite saadaan havaitsemalla ensin, että kohdan (ii) nojalla

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{b} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{b} \cdot g(x) = \frac{1}{b} \lim_{x\to x_0} g(x) = \frac{1}{b} \cdot b = 1.$$

Näin ollen kohtien (ii), (iii) sekä implikaation (4) perusteella saadaan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{g(x)} \cdot f(x) = \frac{1}{b} \cdot 1 \cdot a = \frac{a}{b}.$$

□

Esimerkki 3.3.2 (a) Olkoon $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ polynomi eli muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Tällöin Lauseen 3.3.1 seurauksena

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0),$$

sillä Lauseen 3.3.1 kohtien (i) ja (ii) mukaan

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \\
&\lim_{x\to x_0} a_n x^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_1 x + \lim_{x\to x_0} a_0 = \\
&a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0.
\end{aligned}$$

Huomaa, että Lauseen 3.3.1 ehdot (i) ja (iii) voidaan helposti yleistää induktiolla koskemaan kuinka monta funktiota hyvänsä.

(b) Olkoon R rationaalifunktio eli muotoa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovat polynomeja. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ siten, että $Q(x_0) \neq 0$. Tällöin kohdan (a) ja Lauseen 3.3.1 kohdan (iv) mukaan

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0).$$

Esimerkiksi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x + 5}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1^3 + 2 \cdot 1 + 5}{1^4 + 1^2 + 1} = \frac{8}{3}.$$

Onko olemassa raja-arvo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{1-x^4}?$$

Lausetta 3.3.1 ei voi suoraan hyödyntää, koska nimittäjän raja-arvo pisteessä 1 on nolla. Nyt kuitenkin sekä osoittaja että nimittäjä voidaan jakaa polynomilla $x-1$ ja arvoilla $x\neq 1$ saadaan funktiolle esitys

$$\frac{x^3-1}{1-x^4}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(1-x)(x^3+x^2+x+1)}=\frac{x^2+x+1}{-x^3-x^2-x-1}.$$

Näin ollen

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{1-x^4}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{-x^3-x^2-x-1}=\frac{1^2+1+1}{-1^3-1^2-1-1}=-\frac{3}{4}.$$

Jos $Q(x_0)=0$, mutta $P(x_0)\neq 0$, rationaalifunktiolla $R=\frac{P}{Q}$ ei ole (äärellistä) raja-arvoa pisteessä x_0. Tähän tapaukseen päädytään aina kun x_0 on useampikertainen nollakohta nimittäjäpolynomille kuin osoittajapolynomille. Esimerkiksi kysyttäessä, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-3},$$

yhtälöstä

$$\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-3}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}$$

voidaan päätellä, että raja-arvoa ei ole pisteessä, vrt. Esimerkki 3.3.8.

Esimerkki 3.3.3 Olkoon $x_0>0$ ja $n\in\mathbf{N}$. Pidetään tässä tunnettuna, että

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}. \tag{5}$$

Tämä tulos saadaan sivutuotteena myöhemmin tarkasteltavista käänteiskuvausta koskevista lauseista. Jos $n\in\mathbf{N}$ on pariton, ehto (5) pätee kaikilla $x_0\in\mathbf{R}$. Lasketaan ominaisuuteen (5) nojaten raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}.$$

Lauseen 3.3.1 kohtaa (iv) ei voi suoraan hyödyntää, koska nimittäjän raja-arvo on nolla. Kuitenkin laventamalla summalla $\sqrt{5+x}+\sqrt{5}$ saadaan

$$\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}},\quad x\neq 0.$$

Näin ollen Lauseen 3.3.1 (iv) nojalla

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{5+x}+\lim_{x\to 0}\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Kuristusperiaatteesta voidaan todistaa myös seuraava versio, joka on analoginen lukujonojen kuristusperiaatteen kanssa:

Lause 3.3.4 Olkoot $f, g, h : B'(x_0, r) \to \mathbf{R}$ funktioita siten, että

(a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ kaikilla $x \in B'(x_0, r)$,

(b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a = \lim_{x\to x_0} h(x)$.

Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvo-oletusten mukaan on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} x \in B'(x_0, \delta_1) &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon, \\ x \in B'(x_0, \delta_2) &\Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Valitaan $\delta := \min\{\,\delta_1, \delta_2\,\}$, jolloin kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ pätee

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq a + \varepsilon.$$

Siis $|g(x) - a| < \varepsilon$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ ja väite seuraa. □

Itseisarvoa koskevaa raja-arvotulosta varten tarvitsemme seuraavan version kolmioepäyhtälöstä:

Lemma 3.3.5 Kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$ pätee

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{6}$$

Todistus. Koska

$$|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

saadaan $|x| - |y| \leq |x + y|$. Vaihtamalla x:n ja y:n roolit todetaan, että $|y| - |x| \leq |x + y|$. Näin ollen

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

josta puolestaan väite (6) saadaan korvaamalla y luvulla $-y$. □

Lemma 3.3.6 Oletetaan, että $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - a| < \varepsilon$ kaikilla x, $0 < |x - x_0| < \delta$. Toisaalta Lemman 3.3.5 mukaan

$$||f(x)| - |a|| \leq |f(x) - a|.$$

Siis $||f(x)| - |a|| < \varepsilon$ kaikilla x, $0 < |x - x_0| < \delta$. □

Missä tapauksissa raja-arvoa ei ole?

Kuten jonojen tapauksessa, sen perusteleminen että raja-arvoa ei ole, on kätevintä tehdä seuraavan Cauchyn ehdon avulla:

Lause 3.3.7 Jos funktiolla $f : B'(x_0, r) \to \mathbf{R}$ on raja-arvo a pisteessä x_0, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$x, y \in B'(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$. Jos nyt $x, y \in B'(x_0, \delta)$, niin kolmioepäyhtälön mukaan

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - a + a - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lause 3.3.7 on käyttökelpoinen kun halutaan osoittaa, että funktiolla ei ole raja-arvoa annetussa pisteessä. Tätä varten tulee ymmärtää, että Lauseen 3.3.7 ehdon looginen negaatio on muotoa

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.e. } \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in B'(x_0, \delta) \text{ s.e. } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Esimerkki 3.3.8 (a) Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x > 10 \\ 1, & \text{kun } x \leq 10. \end{cases}$$

Osoitetaan Lauseen 3.3.7 avulla, että funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 10$. Tätä varten, olkoon $\varepsilon = 1$ ja olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Valitaan x ja y siten, että

$$10 - \delta < x < 10 \quad \text{ja} \quad 10 < y < 10 + \delta.$$

Tällöin $x, y \in B(10, \delta)$, mutta

$$|f(x) - f(y)| = |1 - 3| = 2 > \varepsilon.$$

Siis Lauseen 3.3.7 ehto ei toteudu, joten raja-arvoa ei ole olemassa pisteessä 10. Intuitiivisesti tulkiten funktiolla on ”hyppy”pisteessä 10.

(b) Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Osoitetaan, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa. Tätä varten, olkoon $\varepsilon = 1$ ja $0 < \delta \leq 1$ mielivaltainen. Valitaan $x = \frac{\delta}{2}$, $y = -\frac{\delta}{2}$. Tällöin $x, y \in B'(0, \delta)$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta} = \frac{4}{\delta} \geq 4 \geq \varepsilon.$$

Siis Lauseen 3.3.7 ehto ei toteudu, joten raja-arvoa ei ole olemassa origossa. Intuitiivisesti tulkiten funktio kasvaa/vähenee liikaa origoa lähestyttäessä.

(c) Olkoon

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Osoitetaan, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa. Tätä varten, olkoon $\varepsilon = 1$ ja $\delta > 0$ mielivaltainen. Tällöin pisteille

$$x_k = \frac{1}{k \cdot 2\pi}, \quad y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi},$$

pätee $|f(x_k) - f(y_k)| = 1 \geq \varepsilon$ vaikka $x_k, y_k \in B'(0, \delta)$ kunhan $k \in \mathbf{N}$ on riittävän suuri (huomaa, että $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to\infty} y_k$). Intuitiivisesti tulkiten funktio oskilloi (=vaihtelee) liian tiheässä origoa lähestyttäessä.

(d) Tärkeä patologinen esimerkki on funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

jolla ei ole raja-arvoa missään pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$ (harjoitustehtävä). Intuitiivisesti tulkiten funktio oskilloi liian tiheässä kaikkialla.

3.4 Jatkuvuus

Toispuoleiset raja-arvot

Määritelmä 3.4.1 Olkoon $r > 0$. Funktiolla $f :]x_0 - r, x_0[\to \mathbf{R}$ on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* $a \in \mathbf{R}$ pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a,$$

jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Vastaavasti funktiolla $f :]x_0, x_0 + r[\to \mathbf{R}$ on *oikeanpuoleinen raja-arvo* $a \in \mathbf{R}$ pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a,$$

jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Huomautus 3.4.2 Jatkossa pidetään tunnettuna, että myös toispuoleiset raja-arvot toteuttavat Lauseen 3.3.1 perusominaisuudet. Näiden todistamiseksi riittää muuntaa todistuksissa δ-ehdot toispuoleiseksi.

Esimerkki 3.4.3 (a) Funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x > 10 \\ 1, & \text{kun } x \leq 10 \end{cases}$$

pätee $\lim_{x\to 10^-} = 1$, $\lim_{x\to 10^+} = 3$.

(b) Olkoon $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, missä $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

Perustelu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin f:n aidon kasvavuuden nojalla (Lemma 3.1.13) kaikilla $x \in \mathbf{R}_+$ pätee ekvivalenssi

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \iff \sqrt[n]{x} < \varepsilon \iff x < \varepsilon^n.$$

Valitaan $\delta = \varepsilon^n$. Tällöin ehdosta $0 < x < \delta = \varepsilon^n$ seuraa ehto $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Jos n on parillinen, funktiota f ei ole määritelty origon vasemmalla puolella. Näin ollen vasemmanpuoleisesta raja-arvoa ei voida puhua.

Jos n on pariton, vastaavalla tavalla nähdään, että

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Lemma 3.4.4 Funktiolle $f : B'(x_0, r) \to \mathbf{R}$ pätee

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a.$$

Todistus. Implikaatio vasemmalta oikealle on triviaali. Käänteisen implikaation todistamiseksi olkoon $\varepsilon > 0$. Toispuoleisten raja-arvojen määritelmistä seuraa, että on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} x_0 < x < x_0 + \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon, \\ x_0 - \delta_2 < x < x_0 &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jos nyt $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, niin oletuksesta $0 < |x - x_0| < \delta$ seuraa, että $|f(x) - a| < \varepsilon$. $\square$

Esimerkki 3.4.5 Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{kun } x > 1 \\ -x^3 - 3x + a, & \text{kun } x < 1, \end{cases}$$

missä $a \in \mathbf{R}$ on vakio.

Kysymys: Millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvoilla raja-arvo $\lim_{x\to 1} f(x)$ on olemassa?

Vastaus: Lemman 3.4.4 ja Esimerkin 3.3.2 kohdan (a) nojalla

$$\lim_{x\to 1^-} (-x^3 - 3x + a) = \lim_{x\to 1} (-x^3 - 3x + a) = -4 + a$$

ja

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2 + 2x) = \lim_{x\to 1} (x^2 + 2x) = 3.$$

Lemman 3.4.4 mukaan raja-arvo $\lim_{x\to 1} f(x)$ on olemassa täsmälleen silloin kun $-4+a = 3$ eli kun $a = 7$.

Jatkuvuuden määritelmä ja perusominaisuudet

Määritelmä 3.4.6 Olkoon $r > 0$. Funktio $f : B(x_0, r) \to \mathbf{R}$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Edelleen $f : [x_0, x_0 + r[\to \mathbf{R}$ on *oikealta jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ja $f :]x_0 - r, x_0] \to \mathbf{R}$ on *vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Epsilon-delta-kielellä funktio $f : B(x_0, r) \to \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jos funktio f ei ole jatkuva pisteessä x_0, sanotaan että f on *epäjatkuva pisteessä* x_0.

Huomautus 3.4.7 Vaikka tavanomaiset alkeisfunktiot ovatkin määrittelyjoukossaan jatkuvia, on helppo antaa esimerkkejä epäjatkuvista funktioista. Jos funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0, on kaksi mahdollisuutta:

(1) funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä x_0, ks. Esimerkki 3.3.8.

(2) funktiolla f on raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) =: a$, mutta $a \neq f(x_0)$. Yksinkertainen esimerkki tästä on funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \\ 2, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Tapauksessa (2) voidaan puhua epäolennaisesta epäjatkuvuudesta, koska funktio saadaan jatkuvaksi määrittelemällä se uudestaan pisteessä x_0.

Jatkuvuus säilyy funktioiden tavanomaisissa algebrallisissa operaatioissa. Huomaa, että raja-arvon laskusääntöjen vastaavista väitteistä saadaan välittömästi:

Lause 3.4.8 Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin funktiot

$$x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{ja} \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

ovat jatkuvia pisteessä x_0. Lisäksi funktio

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

on jatkuva pisteessä x_0 olettaen, että $g(x_0) \neq 0$.

Todistus. Todistetaan malliksi osamäärää koskeva väite. Oletusten mukaan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0.$$

Lauseen 3.3.1 kohdan (iv) nojalla

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

□

Esimerkki 3.4.9 Epäjatkuvan funktion avulla voidaan konstruoida lisää epäjatkuvia funktioita seuraavasti: Oletetaan, että f on jatkuva pisteessä x_0 ja g on epäjatkuva pisteessä x_0. Tällöin

(a) $f + g$ on epäjatkuva pisteessä x_0,

(b) fg on epäjatkuva pisteessä x_0 jos $f(x_0) \neq 0$.

(c) $\frac{g}{f}$ on epäjatkuva pisteessä x_0, jos $f(x_0) \neq 0$.

Todistetaan malliksi (b). Tätä varten tehdään antiteesi: Funktio h on jatkuva pisteessä x_0, $h(x) = f(x)g(x)$. Lauseen 3.4.8 mukaan funktio $g = h/f$ on jatkuva pisteessä x_0, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Lemmasta 3.3.6 seuraa välittömästi:

Lause 3.4.10 Olkoon f jatkuva pisteessä x_0. Tällöin kuvaus

$$x \mapsto |f(x)|$$

on jatkuva pisteessä x_0.

Esimerkki 3.4.11 Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \max\{\, x^5 + 7, 2x^4 - 5x \,\}$$

on jatkuva kaikilla $x_0 \in \mathbf{R}$, sillä tarkasteltavat funktiot ovat jatkuvia pisteessä x_0 ja kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$ pätee

$$\max\{\, a, b \,\} = \frac{1}{2}(|a - b| + a + b). \tag{7}$$

Yhtälön (7) toteamiseksi kirjoita kumpikin puoli auki sekä tapauksessa $a \geq b$ että tapauksessa $a < b$.

Lause 3.4.12 Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on lukujono siten, että $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, niin $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Toisaalta lukujonon määritelmän nojalla on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta.$$

Siis

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

eli väite pätee. $\square$

Muuntamalla Lauseen 3.4.12 todistuksessa δ-ehdot toispuoleisiksi saadaan vastaavat väitteet toispuoleisille raja-arvoille:

Lause 3.4.13 Jos f on oikealta jatkuva pisteessä x_0 ja $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on lukujono siten, että $x_n \geq x_0$ kaikilla $n \geq n_0$ sekä $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, niin $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Vastaava väite pätee pisteessä x_0 oikealta jatkuvalle funktiolle f.

Esimerkki 3.4.14 Lauseen 3.4.13 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0.$$

Määrätään

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{3n+8}}{n}.$$

Laventamalla saadaan

$$\frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{3n+8}}{n} = \frac{(2n+3) - (3n+8)}{n(\sqrt{2n+3} + \sqrt{3n+8})} = \frac{-n-5}{n(\sqrt{2n+3} + \sqrt{3n+8})}.$$

Tässä $\lim_{n\to\infty} \frac{-n-5}{n} = -1$ ja koska

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{3n+8}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

niin kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{3n+8}} = 0$. Raja-arvon laskussääntöjen mukaan tarkasteltava raja-arvo on 0.

Lause 3.4.15 Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja g jatkuva pisteessä $f(x_0)$. Tällöin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä x_0.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_1 > 0$ siten, että

$$y \in B(f(x_0), \delta_1) \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Valitaan edelleen $\delta_2 > 0$ siten, että

$$x \in B(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1.$$

Siis

$$x \in B(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Tämä todistaa väitteen, sillä $|g(f(x)) - g(f(x_0))| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

Suljetulla välillä jatkuva funktio

Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Funktiota $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sanotaan *jatkuvaksi suljetulla välillä* $[a, b]$, jos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

sekä

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

kaikilla $x_0 \in]a, b[$.

Seuraavan lauseen todistus perustuu olennaisesti täydellisyysaksiomaan. Lisäksi käytetään Lausetta 3.4.12 ja sitä, että epäyhtälö säilyy raja-arvossa.

Lause 3.4.16 (Bolzanon lause) Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva siten, että $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset). Tällöin on olemassa $c \in]a, b[$, jolle $f(c) = 0$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, sillä jos näin ei ole tarkastellaan funktiota $-f$. Merkitään

$$E = \{ x \in [a, b] \mid f(x) < 0 \}.$$

Joukko E on epätyhjä ($a \in E$) ja ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksioman nojalla on olemassa $\sup E \in \mathbf{R}$. Merkitään $c := \sup E$ ja osoitetaan, että c on haluttu piste. Supremumin määritelmän mukaan jokaista $n \in \mathbf{N}$ vastaa $x_n \in E$ siten, että $c - \frac{1}{n} < x_n < c$. Nyt $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, joten Lauseen 3.4.12 nojalla

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c).$$

Koska epäyhtälö säilyy niin lukujonon kuin funktionkin (toispuoleisessa) raja-arvossa, seuraa ehdosta $f(x_n) \leq 0$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$ raja-arvolle $f(c) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq 0$ ja toisaalta ehdosta $f(x) \geq 0$ kaikilla $c < x \leq b$ seuraa toispuoleiselle raja-arvolle $f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) \geq 0$. Siis välttämättä $f(c) = 0$. □

Bolzanon lausetta voidaan soveltaa mm. algebrallisten yhtälöiden nollakohtien lukumäärän tarkasteluun.

Esimerkki 3.4.17 Tarkastellaan yhtälöä

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1.$$

Nyt $P(0) = -1$ ja $P(1) = 1$, joten Bolzanon lauseen mukaan yhtälöllä $P(x) = 0$ on ratkaisu $x \in]0, 1[$. Ratkaisua saadaan arvioitua päättelemällä

$$\begin{array}{lcl} P(\frac{1}{2}) > 0 & \Rightarrow & \text{ratkaisu välillä }]0, \frac{1}{2}[, \\ P(\frac{1}{4}) > 0 & \Rightarrow & \text{ratkaisu välillä }]0, \frac{1}{4}[, \\ P(\frac{1}{8}) < 0 & \Rightarrow & \text{ratkaisu välillä }]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[, \\ & \cdots & \end{array}$$

Seuraus 3.4.18 (Bolzanon lause II) Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva siten, että $f(a) \neq f(b)$. Tällöin f saa jokaisen arvon lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välistä jossakin pisteessä avoimella välillä $]a, b[$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $f(a) < f(b)$. Olkoon $C \in]f(a), f(b)[$. Muodostetaan apufunktio $F : [a,b] \to \mathbf{R}$,

$$F(x) = f(x) - C.$$

Tällöin F on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $F(a) = f(a) - C < 0$ sekä $F(b) = f(b) - C > 0$. Bolzanon lauseen mukaan on olemassa $c \in]a,b[$ siten, että $F(c) = 0 = f(c) - C$. Mutta tällöin $f(c) = C$. $\square$

Bolzanon lauseen versiota II voidaan käyttää mm. funktioiden kuvajoukkojen määräämiseen.

Esimerkki 3.4.19 Olkoon $n \in \mathbf{N}$ parillinen ja $f(x) = x^n$, missä $x \in \mathbf{R}_+$. Esimerkissä **??** käytettiin hyväksi tietoa $f(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}_+$. Perustellaan väite Bolzanon lauseen avulla. Olkoon $y \in \mathbf{R}_+$. Osoitetaan, että $y \in f(\mathbf{R}_+)$. Koska

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} [k^n, (k+1)^n] = \mathbf{R}_+$$

(tämä seuraa Arkhimedeen ominaisuudesta), on olemassa $k = 0, 1, \ldots$ siten, että $y \in [k^n, (k+1)^n]$. Jos $y = k^n$ tai $y = (k+1)^n$, niin $f(k) = y$ tai $f(k+1) = y$. Voidaan siis olettaa, että $y \in]k^n, (k+1)^n[$. Lauseen 3.4.18 nojalla f saa arvon y jossakin välin $]k, k+1[$ pisteessä. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että parittomilla luvuilla $n \in \mathbf{N}$ pätee $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Seuraavan tutun lauseen todistus on varsin syvällinen, joten se sivuutetaan tässä kokonaan, ks. esimerkiksi Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1, ss. 98–101.

Lause 3.4.20 Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin funktio f saa välillä $[a,b]$ pienimmän ja suurimman arvonsa eli on olemassa pisteet $x, y \in [a,b]$ siten, että

$$f(x) = \max f([a,b]) \quad \text{ja} \quad f(y) = \min f([a,b]).$$

Lausetta 3.4.20 tarvitaan tällä kurssilla lähinnä ääriarvotarkasteluissa.

Huomautus 3.4.21 Huomaa, että erityisesti suljetulla välillä jatkuva funktio $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ on *rajoitettu*, so. on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Luvuksi M voidaan valita esimerkiksi

$$M = \max\{\, |\min f([a,b])|, |\max f([a,b])| \,\}.$$

Jatkuvuus avoimessa joukossa

Määritelmä 3.4.22 Joukkoa $\Delta \subset \mathbf{R}$ sanotaan *avoimeksi väliksi*, jos Δ on muotoa $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty, b[$ tai $\Delta = \mathbf{R}$. Edelleen, joukko $U \subset \mathbf{R}$ on *avoin*, jos U on mikä hyvänsä avoimien välien yhdiste.

Huomautus Positiivisten reaalilukujen joukko $]0,\infty[$ on avoin. Joukko $U = \mathbf{R} \setminus \{\, 1, 2 \,\}$ on avoin, mutta ei avoin väli. Avoimet joukot ovat luonnollisia funktioiden määrittelyjoukkoja silloin kun tarkastellaan jatkuvuutta ja derivoituvuutta!

Määritelmä 3.4.23 Olkoon $U \subset \mathbf{R}$ avoin. Tällöin funktiota $f : U \to \mathbf{R}$ sanotaan *jatkuvaksi (joukossa U)*, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in U$.