Analyysi I
2. välikoe
12.12.2002

1. Esitä väliarvolause ja osoita sen avulla: Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja on olemassa $r > 0$ siten, että $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0[$ sekä $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimi.

2. Olkoon $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)\sin x}{x}, \quad \text{kun } x \neq 0.$$

(i) Osoita, että funktio f on jatkuva pisteessä $x = 0$.

(ii) Onko f derivoituva pisteessä $x = 0$?

3. Osoita, että funktio

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$$

on kasvava välillä $]-\infty, 1[$. Osoita edelleen, että

$$\frac{1}{2} \log f(x) > x$$

kaikilla $x \in]0, 1[$.

4. Syksyllä 2002 tehtävä 4 käsitteli lukujonoja, jotka eivät nyt kuulu koealueeseen.

Analyysi I
2. välikoe
11.12.2003

1. Olkoon f derivoituva pisteessä x_0. Määrää

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

raja-arvon laskusääntöjä käyttäen. Minkä teoreettisen tuloksen raja-arvolasku todistaa?

2. Olkoon $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{2}$.

(a) Osoita Bolzanon lauseen avulla, että funktiolla f on nollakohta välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Mitä derivaatta kertoo funktion f monotonisuudesta välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

3. Määrää funktion $f(x) = (\sin^2 x)e^{-\cos^2 x}$ lokaalit ääriarvot joukossa $\mathbf{R}$. Onko funktiolla f pienintä tai suurinta arvoa joukossa $\mathbf{R}$?

4. Funktiot $\sinh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $\cosh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään asettamalla

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{ja} \quad \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

(a) Osoita, että kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.

(b) Määrää luvun $\frac{1}{2}$ alkukuva kuvauksessa $f : \mathbf{R} \to]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$