Analyysi II

Visa Latvala ja Jari Taskinen

4. huhtikuuta 2003

Sisältö

1 Vektoriavaruudet $\mathbf{R}^2$ ja $\mathbf{R}^n$ 4

1.1 Tason topologiaa 9

2 Useamman muuttujan funktiot 15

2.1 Kahden muuttujan funktion raja-arvo ja jatkuvuus 17

3 Differentiaalilaskenta 26

3.1 Osittaisderivaatta 26

3.2 Differentioituvuus 30

3.3 Korkeamman kertaluvun derivaatat 34

3.4 Gradientti ja suunnatut derivaatat 38

3.5 Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen 41

4 Käyrät ja pinnat 46

4.1 Tasokäyrä ja tasokäyrän tangentti 46

4.2 Tasa-arvopinnat ja tangenttitaso 51

5 Väliarvolause ja implisiittifunktiolause 53

5.1 Väliarvolause 53

5.2 Implisiittifunktiolause 54

6 Ääriarvojen teoriaa **56**

6.1 Lokaalit ääriarvot 56

6.2 Sidotut ääriarvot 62

6.3 Globaalit ääriarvot 64

Johdanto

On helppo antaa esimerkkejä ilmiöistä, joihin liittyy useita muuttujia ja joihin liittyviä kysymyksiä ei voida selvittää yhden muuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskennan avulla.

Esimerkki 0.0.1 (a) Tarkastellaan lämpötilaa T tietyssä tilassa. Lämpötila riippuu paitsi paikasta myös ajanhetkestä. Paikka voidaan kolmiulotteisessa avaruudessa ilmaista kolmen paikkakoordinaatin x, y, z avulla, joten ilmaisemalla ajanhetki muuttujalla t merkitään $T = T(x, y, z, t)$. Tällä tarkoitetaan, että suure T riippuu muuttujista x, y, z, t eli T on neljän muuttujan funktio. Voidaan kysyä esimerkiksi sitä, missä pisteessä (x, y, z) annetulla ajanhetkellä t_0 funktio T saavuttaa suurimman arvonsa. Kyseinen optimointiongelma voidaan ratkaista useamman muuttujan differentiaalilaskennan avulla, jos T:n riippuvuus muuttujistaan tunnetaan.

(b) Tarkastellaan kahta toisistaan riippumatonta satunnaismuuttujaa X ja Y, jotka kumpikin noudattavat normeerattua normaalijakaumaa. Tällöin kaksiulotteisen satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

missä $x, y \in \mathbf{R}$. Nyt esimerkiksi todennäköisyys sille, että $-1 \leq X \leq 2$ ja $0 \leq Y \leq \frac{1}{2}$ saadaan funktion f pintaintegraalina yli neliön

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \}.$$

Ilmiö yleistyy mielivaltaiseen dimensioon n, jolloin puhutaan n-ulotteisesta integraalista. Tilastotiedettä sovellettaessa esiintyy usein funktioita, joilla on runsaasti parametreja.

(c) Oletetaan, että hiukkanen liikkuu sähkökentässä siten voimavektori on paikan funktio, ts. $F = F(x, y, z)$. Voidaan kysyä esimerkiksi sitä, kuinka suuri työ tehdään, kun hiukkanen liikkuu pisteestä A pisteeseen B. Jos voimafunktio sekä pisteiden A ja B välinen reitti (käyrä) tunnetaan, työ saadaan ns. 3-ulotteisena käyräintegraalina.

Kurssi sisältää useamman muuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan perusteet siten, että ensisijaisesti tarkastellaan kahden muuttujan funktioita. Kahden muuttujan funktioiden olennaisena etuna on se, että funktion kuvaaja ja sitä kautta tarkasteltavat ilmiöt voidaan visualisoida kolmiulotteisessa avaruudessa. Esimerkiksi kurssilla tutustutaan optimointiin ja käyrä-sekä pintaintegraaleihin. Vaikka kurssilla painotetaan kaksiulotteista tapausta, keskeiset määritelmät ja tulokset esitetään kuitenkin yleisessä tapauksessa.

1 Vektoriavaruudet $\mathbf{R}^2$ ja $\mathbf{R}^n$

Merkitään

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^2 &:= \{\,(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R},\,\}\,,\\ \mathbf{R}^n &:= \{\,(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbf{R} \text{ kaikilla } j = 1, \dots, n\,\}\,,\end{aligned}$$

missä $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Joukkojen $\mathbf{R}^2$ ja $\mathbf{R}^n$ alkioita sanotaan *pisteiksi* tai *vektoreiksi*. Avaruuden $\mathbf{R}^n$ pisteille käytetään vektorimerkintää, esimerkiksi

$$\begin{aligned}\overline{x} &= (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\\ \overline{y} &= (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3,\\ \overline{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4.\end{aligned}$$

Lukua x_1 sanotaan pisteen (vektorin) $\overline{x}$ ensimmäiseksi *koordinaatiksi (tai komponentiksi)*, lukua x_2 pisteen $\overline{x}$ toiseksi koordinaatiksi (komponentiksi), jne. *Nollavektoria*

$$\overline{0} = (0, 0) \in \mathbf{R}^2, \quad \overline{0} = (0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3, \quad \overline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$$

sanotaan usein *origoksi*. Kaksi vektoria $\overline{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbf{R}^n$ ja $\overline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ *ovat samat* täsmälleen silloin kun kaikki vastinkoordinaatit ovat samat, ts. kun $x_i = y_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

Tason vektorien laskutoimitukset

Tarkastellaan aluksi avaruutta $\mathbf{R}^2$. Vektorien $\overline{x} = (x_1, x_2)$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2)$ yhteenlasku määritellään kaavalla

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Esimerkki Yhteenlaskun määritelmästä saadaan

$$(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$$

ja

$$(1, 10) + (3, \pi) + (-4, 0) = (1 + 3 + (-4), 10 + \pi + 0) = (0, 10 + \pi).$$

Huomaa, että yhteenlaskun liitännäisyyden seurauksena kahta useammankin alkion tapauksessa vastinkoordinaatit voidaan summata "suoraan".

Tehtävä Tutki, miten tason vektorien yhteenlasku liittyy suunnikkaaseen!

Vektorin $\overline{x} = (x_1, x_2)$ kertominen reaaliluvulla a määritellään ehdolla

$$a\overline{x} = (ax_1, ax_2).$$

Esimerkki Esimerkiksi

$$3(2,1) = (6,3), \quad \frac{1}{2}(2,1) = (1, \frac{1}{2}), \quad -2(2,1) = (-4,-2).$$

Vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ erotus määritellään

$$\overline{x} - \overline{y} = \overline{x} + (-\overline{y}),$$

missä $-\overline{y} = -1 \cdot (y_1, y_2) = (-y_1, -y_2)$. Edelleen, vektorien $\overline{x} = (x_1, x_2)$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2)$ *sisätulo (pistetulo, skalaaritulo)* määritellään ehdosta

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Huomaa, että $\overline{x} \cdot \overline{y} \in \mathbf{R}$. Sisätulon geometrinen merkitys käy ilmi yhtälöstä

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}||\overline{y}| \cos(\overline{x}, \overline{y}), \tag{1}$$

missä $|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ja $|\overline{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ ovat vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ *pituudet (normit)* ja $(\overline{x}, \overline{y})$ on vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ *välinen kulma*. Yhtälö (1) voidaan perustella esimerkiksi *kosinilauseen*

$$|\overline{y} - \overline{x}|^2 = |\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2 - 2|\overline{x}||\overline{y}| \cos(\overline{x}, \overline{y})$$

avulla. Asiaa käsitellään harjoitustehtävissä.

Tason $\mathbf{R}^2$ tavanomaisille kantavektoreille käytetään merkintöjä $\overline{e}_1 = (1,0)$ ja $\overline{e}_2 = (0,1)$. Näitä käyttäen vektorille $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ saadaan esitys

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2.$$

Usein merkitään

$$\overline{e}_1 = \overline{i} \quad \text{ja} \quad \overline{e}_2 = \overline{j},$$

jolloin siis

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}.$$

Laskutoimitukset avaruudessa $\mathbf{R}^n$

Yleiset määritelmät ovat analogisia. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$\begin{aligned}\overline{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \\ \overline{y} &= (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n.\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{y} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n, \\ a\overline{x} &:= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) \in \mathbf{R}^n, \\ -\overline{x} &:= (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbf{R}^n.\end{aligned}$$

Kantavektorit ovat yleisesti muotoa

$$\begin{aligned}\overline{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ \overline{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ \overline{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1).\end{aligned}$$

Jos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, niin kantavektoreiden avulla saadaan esitys

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_n\overline{e}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{e}_j.$$

Tapauksessa $n = 3$ käytetään usein merkintöjä $\overline{e}_1 = \overline{i}$, $\overline{e}_2 = \overline{j}$, $\overline{e}_3 = \overline{k}$, jolloin

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}.$$

Vektoreiden $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ja $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ sisätulo määritellään asettamalla

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Esimerkki (a) Jos $n = 3$, niin

$$\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1).$$

Kyseinen piste on origokeskisen kuution, jonka sivun pituus on 2, eräs kärkipiste.

(b) Tapauksessa $n = 4$

$$(1, 0, -2, \frac{1}{2}) \cdot (1, 0, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = -1.$$

Lemma 1.0.2 Jos $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{R}^n$ ja $a, b \in \mathbf{R}$, niin

(a) $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ ja $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$ jos ja vain jos $\overline{x} = \overline{0}$

(b) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$

(c) $\overline{x} \cdot (a\overline{y} + b\overline{z}) = a\overline{x} \cdot \overline{y} + b\overline{x} \cdot \overline{z}$.

Todistus. (a) Sisätulon määritelmän mukaan

$$\overline{x} \cdot \overline{x} = x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Edelleen $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$ jos ja vain jos $x_i^2 = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tämä pätee jos ja vain jos $\overline{x} = \overline{0}$.

(b) Määritelmän mukaan

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \overline{y} \cdot \overline{x}.$$

(c) Suora lasku, harjoitustehtävä. $\square$

Esimerkki 1.0.3 (a) Tarkastellaan Lemman 1.0.2 (c)-kohtaa tapauksessa $n = 3$, $\overline{x} = (1, 1, 0)$, $\overline{y} = (0, 3, -1)$, $\overline{z} = (0, 1, 2)$, $a = 1$ ja $b = 2$. Nyt

$$\overline{x} \cdot (a\overline{y} + b\overline{z}) = (1, 1, 0) \cdot [(0, 3, -1) + (0, 2, 4)] = (1, 1, 0) \cdot (0, 5, 3) = 5.$$

Toisaalta

$$a\overline{x} \cdot \overline{y} + b\overline{x} \cdot \overline{z} = (1, 1, 0) \cdot (0, 3, -1) + 2(1, 1, 0) \cdot (0, 1, 2) = 3 + 2 = 5.$$

(b) Lasketaan $(\overline{x}+\overline{y}) \cdot (\overline{x}+\overline{y})$ mielivaltaisille $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^n$. Lemman 1.0.2 nojalla

$$\begin{aligned}(\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) &= \overline{x} \cdot (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{y} \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{x} + \overline{y} \cdot \overline{y} \\ &= \overline{x} \cdot \overline{x} + 2(\overline{x} \cdot \overline{y}) + \overline{y} \cdot \overline{y}.\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ *pituus eli normi* määritellään asettamalla

$$|\, \overline{x}\, | = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}.$$

Esimerkki (a) Esimerkin 1.0.3 yhtälö saa normin avulla muodon

$$|\overline{x} + \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2 + 2(\overline{x} \cdot \overline{y}).$$

(b) Olkoot $\overline{x} = (1, 2)$ ja $\overline{y} = (4, 5)$. Tällöin $\overline{x} - \overline{y} = \overline{i} + 2\overline{j} - (4\overline{i} + 5\overline{j}) = -3\overline{i} - 3\overline{j}$, joten

$$|\overline{x} - \overline{y}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

on pisteiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ välinen etäisyys. Yleisesti, kaikille $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^2$ normi $|\overline{x} - \overline{y}|$ antaa pisteiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ välisen etäisyyden. Tämä seuraa Pythagoraan lauseesta (piirrä kuva). Sama ilmiö pätee kaikissa dimensioissa (perustelu sivuutetaan).

Lause 1.0.4 Olkoot $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^n$ ja $a \in \mathbf{R}$. Tällöin

(a) $|\,\overline{x}\,| \geq 0$

(b) $|\,a\overline{x}\,| = |\,a\,|\,|\,\overline{x}\,|$

(c) $|\,\overline{x} \cdot \overline{y}\,| \leq |\,\overline{x}\,|\,|\,\overline{y}\,|$ (Schwarzin epäyhtälö)

(d) $|\,\overline{x} + \overline{y}\,| \leq |\,\overline{x}\,| + |\,\overline{y}\,|$ (Kolmioepäyhtälö)

(e) $|\,\overline{x} + \overline{y}\,| \geq |\,|\,\overline{x}\,| - |\,\overline{y}\,|\,|$.

Todistus. Kohta (a) on selvä, kohdat (b), (d) ja (e) ovat harjoitustehtäviä. Todistetaan (c). Voidaan olettaa, että $\overline{x} \neq \overline{0}$. Jokaisella $t \in \mathbf{R}$ pätee

$$0 \leq (t\overline{x} + \overline{y}) \cdot (t\overline{x} + \overline{y}) = t^2|\overline{x}|^2 + 2t(\overline{x} \cdot \overline{y}) + |\overline{y}|^2.$$

Siis oikealla puolella on toisen asteen polynomi t:n suhteen ja tiedetään, että polynomilla on korkeintaan yksi nollakohta. Tällöin välttämättä diskrimantti on ei-positiivinen eli

$$(2(\overline{x} \cdot \overline{y}))^2 - 4|\overline{x}|^2|\overline{y}|^2 \leq 0.$$

Saadaan $|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq |\overline{x}||\overline{y}|$. $\square$

Huomautus Kolmioepäyhtälö sanoo, että mielivaltaisessa kolmiossa kolmannen sivun pituus on korkeintaan yhtä suuri kuin kahden muun sivun pituuksien summa. Lauseen 1.0.4 kohta (e) puolestaan sanoo, että mielivaltaisessa kolmiossa kahden sivun pituuksien erotus on itseisarvoltaan korkeintaan kolmannen sivun pituus.

Esimerkki 1.0.5 Jos $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, niin vektorin $\overline{x}$ *suuntainen yksikkövektori* $\overline{y}$ saadaan jakamalla $\overline{x}$ normillaan eli

$$\overline{y} = \frac{\overline{x}}{|\overline{x}|}.$$

Nimittäin Lauseen 1.0.4 kohdan (b) nojalla $|\overline{y}| = |\frac{1}{|\overline{x}|}\overline{x}| = \frac{1}{|\overline{x}|}|\overline{x}| = 1$. Esimerkiksi, jos $\overline{x} = (1, 2, -3)$, niin $\overline{x}$:n suuntainen yksikkövektori on

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + (-3)^2}}(1, 2, -3) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3).$$

Yleisesti avaruudessa $\mathbf{R}^n$ kahden vektorin $\overline{x} \neq \overline{0}$ ja $\overline{y} \neq \overline{0}$ *välinen kulma* $(\overline{x}, \overline{y})$ saadaan yhtälöstä

$$\cos(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|}.$$

Jos $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$, ja $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$, sanotaan, että $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, ja merkitään $\overline{x} \perp \overline{y}$.

Esimerkki Esimerkiksi aiemmin todettiin, että

$$(1, 0, -2, \frac{1}{2}) \cdot (1, 0, 1, 0) = -1,$$

joten vektorien $(1, 0, -2, \frac{1}{2})$ ja $(1, 0, 1, 0)$ välisen kulman α kosiniksi saadaan

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{\frac{21}{4}}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}}.$$

Kulmaksi α saadaan

$$\alpha = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}}) \approx 1.88\ (rad).$$

Esimerkki Olkoot $\overline{x} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{y} = 3\overline{i} + \overline{i} + 2\overline{k}$. Määrätään vakio $t \in \mathbf{R}$ siten, että vektorit $\overline{x} - t\overline{y}$ ja $\overline{y}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Nyt

$$\overline{x} - t\overline{y} = (2 - 3t)\overline{i} + (-1 - t)\overline{j} + (2 - 2t)\overline{k},$$

joten

$$\overline{y} \cdot (\overline{x} - t\overline{y}) = 3(2 - 3t) + 1(-1 - t) + 2(2 - 2t) = 9 - 14t = 0$$

täsmälleen silloin kun $t = \frac{9}{14}$.

1.1 Tason topologiaa

Reaalilukujono $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$, esimerkiksi $x_k = \frac{1}{k}$, voidaan tulkita jonoksi tasossa $\mathbf{R}^2$ merkitsemällä

$$\overline{x}_k = (\frac{1}{k}, 0).$$

Huomaa, että $|\overline{x}_k - \overline{0}| = |\frac{1}{k} - 0|$. Analyysi I:n kurssilta tiedetään, että

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0,$$

sillä kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$|\frac{1}{k} - 0| = \frac{1}{k} < \varepsilon \iff k > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Siis jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että $|x_k - 0| < \varepsilon$ aina kun $k > k_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}$ (reaalilukujonon raja-arvon määritelmä).

Yleisesti, jos $(x_{1k})_{k\in\mathbf{N}}$ ja $(x_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$ ovat kaksi reaalilukujonoa, niin tason $\mathbf{R}^2$ pisteet $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k})$ muodostavat jonon tasossa $\mathbf{R}^2$. Esimerkiksi, jos $x_{1k} = 2 + \frac{1}{k}$ ja $x_{2k} = \frac{k-3}{k}$, muodostuu jono

$$\overline{x}_k = \left(2 + \frac{1}{k}, \frac{k-3}{k}\right).$$

Tason vektorijonoille suppeneminen määritellään samaan tapaan kuin reaalilukujonoille korvaamalla yksiulotteinen etäisyys (itseisarvo) kaksiulotteisella etäisyydellä (normi tai moduli):

Määritelmä 1.1.1 Olkoon $(\overline{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ jono vektoreita tasossa $\mathbf{R}^2$. Jono $(\overline{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ suppenee kohti pistettä $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$, jos

$$\lim_{k\to\infty} |\,\overline{x}_k - \overline{x}\,| = 0. \tag{2}$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}.$$

Siis ehto (2) tarkoittaa: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$k > k_\varepsilon \Rightarrow |\,\overline{x}_k - \overline{x}\,| < \varepsilon.$$

Esimerkki Osoitetaan, että jono

$$\overline{x}_k = \left(2 + \frac{1}{k}, \frac{k-3}{k}\right)$$

suppenee kohti pistettä

$$\overline{x} = (2,1) = \left(\lim_{k\to\infty}(2 + \frac{1}{k}), \lim_{k\to\infty}(\frac{k-3}{k})\right).$$

Laskemalla etäisyys $|\overline{x}_k - \overline{x}|$ saadaan

$$|\,\overline{x}_k - \overline{x}\,| = \sqrt{(2 + \frac{1}{k} - 2)^2 + (\frac{k-3}{k} - 1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{k}.$$

Tämä lähestyy lukua 0, kun $k \to \infty$.

Seuraavat reaalilukujonojen keskeiset ominaisuudet on todistettu kursilla Analyysi I:

Lemma 1.1.2 Olkoot $x, y, x_k, y_k \in \mathbf{R}$ siten, että $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ ja $\lim_{k\to\infty} y_k = y$. Tällöin

(a) $\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x + y$,

(b) $\lim_{k\to\infty}(x_k y_k) = xy$,

(c) Jos $0 \le |y_k| \le x_k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, niin $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$.

Kohtaa (c) sanotaan *kuristusperiaatteeksi*. Kuristusperiaatteen avulla voidaan kätevästi todistaa:

Lause 1.1.3 Olkoon $(\overline{x}_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^2$, $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k})$ ja $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$$

jos ja vain jos

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} x_{1k} &= x_1 \\ \lim_{k\to\infty} x_{2k} &= x_2. \end{cases}$$

Todistus. Oletetaan, että $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$. Tällöin

$$0 \le |x_{ik} - x_i| \le |\overline{x}_k - \overline{x}|, \; i = 1, 2,$$

joten kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{k\to\infty} |x_i - x_{ik}| = 0$ kun $i = 1, 2$. Olkoon kääntäen voimassa $\lim_{k\to\infty} x_{ik} = x_i$, $i = 1, 2$. Tällöin kolmioepäyhtälön mukaan

$$0 \le |\overline{x}_k - \overline{x}| \le |x_{1k} - x_1| + |x_{2k} - x_2|.$$

Oletusten ja Lemman 1.1.2 kohdan (a) nojalla

$$\lim_{k\to\infty} (|x_{1k} - x_1| + |x_{2k} - x_2|) = 0,$$

joten kuristusperiaatteen mukaan $\lim_{k\to\infty} |\overline{x}_k - \overline{x}| = 0$ eli $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$.
$\square$

Esimerkki (a) Olkoon

$$\overline{x}_k = \left(\sin\left(\frac{1}{k}\right), \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Tässä siis $x_{1k} = \sin(\frac{1}{k})$ ja $x_{2k} = \cos(\frac{1}{k})$. Koska sini ja kosini ovat jatkuvia origossa, pätee

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x_{1k} &= \lim_{k\to\infty} \sin(\tfrac{1}{k}) = \sin 0 = 0 \\ \lim_{k\to\infty} x_{2k} &= \lim_{k\to\infty} \cos(\tfrac{1}{k}) = \cos 0 = 1, \end{aligned}$$

ja Lauseen 1.1.3 nojalla $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = (0,1)$.

(b) Olkoon

$$\overline{x}_k = \left(\frac{k^2+k}{3k^2+2k+1}, \frac{e^k}{e^k+k^2} \right).$$

Tällöin

$$x_{1k} = \frac{k^2+k}{3k^2+2k+1} = \frac{1+\frac{1}{k}}{3+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}} \to \frac{1}{3},$$

kun $k \to \infty$, ja

$$x_{2k} = \frac{e^k}{e^k+k^2} = \frac{1}{1+\frac{k^2}{e^k}} \to 1,$$

kun $k \to \infty$. Jälkimmäinen raja-arvo seuraa siitä, että eksponenttifunktiolla on ominaisuus $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, ks. Analyysi I. Lauseen 1.1.3 nojalla $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = (\frac{1}{3}, 1)$.

Lemman 1.1.2 raja-arvon laskusäännöt (a)-(c) pätevät myös vektorijonoille:

Lause 1.1.4 Jos $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} = (x_1, x_2)$, $\lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{y} = (y_1, y_2)$ ja $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ on sellainen jono, että $\lim_{k\to\infty} a_k = a \in \mathbf{R}$, niin

(a) $\lim_{k\to\infty} (\overline{x}_k + \overline{y}_k) = \overline{x} + \overline{y}$,

(b) $\lim_{k\to\infty} a_k \overline{y}_k = a\overline{y}$,

(c) $\lim_{k\to\infty} (\overline{x}_k \cdot \overline{y}_k) = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Todistus. Todistukset saadaan helposti yhdistämällä Lemma 1.1.2 ja Lause 1.1.3. Todistetaan malliksi (c). Koska

$$\overline{x}_k \cdot \overline{y}_k - \overline{x} \cdot \overline{y} = x_{1k}y_{1k} + x_{2k}y_{2k} - (x_1y_1 + x_2y_2) = (x_{1k}y_{1k} - x_1y_1) + (x_{2k}y_{2k} - x_2y_2)$$

ja Lemman 1.1.2 (b) sekä Lauseen 1.1.3 nojalla

$$\lim_{k\to\infty} (x_{1k}y_{1k} - x_1y_1) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} (x_{2k}y_{2k} - x_2y_2) = 0,$$

niin väite $\lim_{k\to\infty} (\overline{x}_k \cdot \overline{y}_k - \overline{x} \cdot \overline{y}) = 0$ seuraa Lemman 1.1.2 kohdasta (a). $\square$

Avoin joukko, suljettu joukko ja kasaantumispiste

Olkoon $\overline{a} := (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ ja $r > 0$. Tällöin joukkoa

$$B(\overline{a}, r) = \left\{ \overline{y} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |\,\overline{y} - \overline{a}\,| < r \right\}.$$

sanotaan $\overline{a}$-keskiseksi r-säteiseksi *avoimeksi palloksi (kiekoksi)*. Huomaa, että

$$|\,\overline{y} - \overline{a}\,| = \sqrt{(y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2}$$

on pisteiden $\overline{y}$ ja $\overline{a}$ etäisyys. Joukkoa $B(\overline{a}, r)$ sanotaan myös $\overline{a}$:n (r-säteiseksi) *palloympäristöksi.*

Vastaavasti määritellään *suljettu pallo (kiekko)*

$$\overline{B}(\overline{a}, r) := \left\{ \overline{y} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |\,\overline{y} - \overline{a}\,| \leq r \right\}$$

ja *punkteerattu pallo (kiekko)*

$$B(\overline{a}, r) \setminus \{\overline{a}\} := \left\{ \overline{y} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 < |\,\overline{y} - \overline{a}\,| < r \right\}.$$

Määritelmä 1.1.5 Joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ on avoin, jos jokaista $\overline{x} \in A$ vastaa pallo $B(\overline{x}, r)$, jolle $B(\overline{x}, r) \subset A$. Joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ on *suljettu*, jos sen komplementti $\mathbf{R}^2 \setminus A$ on avoin.

Seuraavassa esimerkissä nojataan pitkälle heuristiseen päättelyyn, väitteitä ei ryhdytä järjestelmällisesti todistamaan analyyttisin keinoin.

Esimerkki 1.1.6 (a) Joukko

$$A := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 2 \right\}$$

on avoin, sillä jokaisella $\overline{x} \in A$ pätee $B(\overline{x}, \frac{1}{2}(x_1 - 2)) \subset A$. Todistetaan tämä malliksi täsmällisesti. Olkoon $\overline{x} \in A$ ja merkitään $r := \frac{x_1 - 2}{2}$. On osoitettava, että jos $\overline{y} \in B(\overline{x}, r)$, niin $\overline{y} \in A$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\,y_1 - x_1\,| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2} \leq \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq r = \frac{x_1 - 2}{2}.$$

Jos $y_1 \geq x_1$, niin $y_1 > 2$, sillä $x_1 > 2$. Tässä tapauksessa $\overline{y} \in A$. Toisaalta, jos $y_1 < x_1$, niin

$$|y_1 - x_1| < \frac{x_1 - 2}{2} \iff x_1 - \frac{x_1 - 2}{2} < y_1 \iff \frac{x_1 + 2}{2} < y_1.$$

Koska $x_1 > 2$, tässäkin tapauksessa $\overline{y} \in A$.

(b) Siis joukko

$$\mathbf{R}^2 \setminus A := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \leq 2\Big\}$$

on suljettu.

(c) Jana

$$\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 10\} =: A$$

on suljettu, sillä $B := \mathbf{R}^2 \setminus A$ on avoin. Nimittäin kaikilla $\overline{y} := (y_1, y_2) \in B$ jompi kumpi vaihtoehdoista (1) ja (2) on voimassa:

(1) $y_2 \neq 0$,

(2) $y_2 = 0$, mutta $y_1 \notin [0, 10]$.

Tapauksessa (1) riittää valita esimerkiksi $r = \frac{|y_2|}{2}$, jolloin $B(\overline{y}, r) \subset B$. Tapauksessa (2) pätee $y_1 < 0$ tai $y_1 > 10$. Jos $y_1 < 0$, riittää valita $r = \frac{|y_1|}{2}$, mistä seuraa $B(\overline{y}, r) \subset B$. Jos taas $y_1 > 10$, riittää valita $r = \frac{y_1 - 10}{2}$, mistä seuraa $B(\overline{y}, r) \subset B$.

(d) Joukko

$$A := \{(x, 0) \mid 0 < x < 10\}$$

ei ole avoin eikä suljettu. Nimittäin A ei ole avoin, sillä $\overline{x} = (5, 0) \in A$ ja $B(x, r) \cap (\mathbf{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Joukko A ei ole suljettu, sillä $\overline{0} \in \mathbf{R}^2 \setminus A$, mutta jokainen ympäristö $B(\overline{0}, r)$ sisältää A:n pisteitä eli $\mathbf{R}^2 \setminus A$ ei ole avoin.

(e) Myöskään joukko

$$A := \Big\{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 < x_2 < 1\Big\}.$$

ei ole avoin eikä suljettu. Perustele!

Lause 1.1.7 Avoin pallo $B(\overline{a}, r) \subset \mathbf{R}^2$ on avoin joukko.

Todistus. Olkoon $\overline{x} \in B(\overline{a}, r)$. Riittää osoittaa, että $B(\overline{x}, r_0) \subset B(\overline{a}, r)$, kun $r_0 = r - |\overline{a} - \overline{x}|$. Mutta kaikilla $\overline{y} \in B(\overline{x}, r_0)$ pätee $|\overline{y} - \overline{x}| < r_0$, joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\overline{y} - \overline{a}| = |\overline{y} - \overline{x} + \overline{x} - \overline{a}| \leq |\overline{y} - \overline{x}| + |\overline{x} - \overline{a}| < r_0 + |\overline{x} - \overline{a}| = r.$$

Siis $\overline{y} \in B(\overline{a}, r)$ eli $B(\overline{x}, r_0) \subset B(\overline{a}, r)$. $\square$

Määritelmä 1.1.8 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$, $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Piste $\overline{x}$ on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokainen pisteen $\overline{x}$ palloympäristö $B(\overline{x}, r)$ sisältää vähintään yhden A:n pisteen $\overline{y}$, jolle $\overline{y} \neq \overline{x}$.

Esimerkki Olkoon

$$A := \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Tällöin $\overline{0}$ on joukon A kasaantumispiste. Jos nimittäin $r > 0$ on mielivaltainen, niin

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \in B(\overline{0}, r) \iff \sqrt{\frac{2}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k} < r \iff k > \frac{\sqrt{2}}{r}.$$

Lause 1.1.9 Jos $\overline{x}$ on joukon A kasaantumispiste, niin jokainen palloympäristö $B(\overline{x}, r)$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. Lisäksi on olemassa jono $(\overline{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ joukon A pisteitä siten, että $\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k = \overline{x}$.

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että pallo $B(\overline{x}, r)$ sisältää vain äärellisen monta joukon A pistettä. Olkoot nämä pisteet $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in A \cap B(\overline{x}, r)$. Jos nyt

$$r' := \min\{\, |\overline{x} - \overline{x}_1|, \ldots, |\overline{x} - \overline{x}_n| \,\},$$

niin $B(\overline{x}, r') \cap A = \emptyset$, mikä on ristiriita kasaantumispisteen määritelmän kanssa. Haluttu jono $(\overline{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ saadaan yksinkertaisesti valitsemalla jokaisella $k \in \mathbf{N}$ jokin $\overline{x}_k \in B(\overline{x}, \frac{1}{k}) \cap A$. Tällöinhän $|\overline{x}_k - \overline{x}| < \varepsilon$ aina kun $\frac{1}{k} < \varepsilon$. $\square$

2 Useamman muuttujan funktiot

Olkoon $m, n \in \mathbf{N}$ ja $A \subset \mathbf{R}^m$. Kuvausta $f : A \to \mathbf{R}$ sanotaan *m:n muuttujan (reaali)funktioksi.*

Kuvausta $f : A \to \mathbf{R}^n$ sanotaan *m:n muuttujan n-arvoiseksi* kuvaukseksi.

Tapauksessa $m = n \geq 2$ kuvausta $f : A \to \mathbf{R}^n$ sanotaan myös *vektorikentäksi.*

Esimerkki Kahden muuttujan reaaliarvoisia funktioita ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x\sin y, \\
f(x,y) &= x^2+3x^2y-y^3, \\
g(x,y) &= \tfrac{1}{x^2+y^2}-\tfrac{1}{y},\ y\neq 0, \\
h(x_1,x_2) &= \cos x_1 \sin x_2, \\
h(\overline{x}) &= |\,\overline{x}\,|+3\,|\,\overline{x}\,|^2, \\
g(x_1,x_2) &= \begin{cases} 1, & x_1 \geq x_2 \\ \sin x_1, & x_1 < x_2 \end{cases},
\end{aligned}$$

missä $x, y, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Esimerkki Kahden muuttujan kaksiarvoisia kuvauksia ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x^2+y^2, \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}), \quad x,y\neq 0, \\
g(x_1,x_2) &= (\sin x_1+\cos x_2, \sin x_2-\cos x_1).
\end{aligned}$$

Yleisesti kahden muuttujan kaksiarvoinen kuvaus $f : A \to \mathbf{R}^2$ (vektorikenttä) on muotoa

$$f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}))\,,$$

missä $f_1 : A \to \mathbf{R}$ ja $f_2 : A \to \mathbf{R}$ ja $\overline{x} \in A \subset \mathbf{R}^2$.

Esimerkki Kahden muuttujan kolmiarvoisia kuvauksia ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= (2x+y, 3y^2, 2x^2), \\
f(\overline{x}) &= (\sin x_1, \cos(x_1+x_2), \tan x_2).
\end{aligned}$$

Yleisesti, jos $A \subset \mathbf{R}^m$, niin kuvaus $f : A \to \mathbf{R}^n$ on muotoa

$$f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_n(\overline{x}))\,,$$

missä $\overline{x} \in A \subset \mathbf{R}^m$ ja reaaliarvoisia funktioita $f_j : A \to \mathbf{R}$ sanotaan f:n *koordinaattifunktioiksi (komponenttifunktioiksi).*

Esimerkki 2.0.10 (a) Tarkastellaan funktiota $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = x^2+2y^2.$$

Tällöin alkukuvajoukko $f^{-1}(\{2\})$ (tasa-arvokäyrä) on niiden pisteiden $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ joukko, joille pätee

$$x^2+2y^2 = 2.$$

Voidaan osoittaa, että ko. tason pisteet muodostavat origo-keskisen ellipsin.

(b) Tarkastellaan funktiota $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1^2 - 3x_2^3.$$

Määrätään alkukuvajoukko $f^{-1}(\{0\})$. Saadaan

$$f(\overline{x}) = x_3 + x_1^2 - 3x_2^3 = 0 \iff x_3 = 3x_2^3 - x_1^2.$$

Havaitaan, että ko. alkukuvajoukko on funktion $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$g(\overline{x}) = 3x_2^3 - x_1^2,$$

kuvajoukko $g(\mathbf{R}^2)$. Ratkaisujoukko on pinta avaruudessa $\mathbf{R}^3$.

(c) Olkoon f kuten kohdassa (b) ja olkoon $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$g(\overline{x}) = (x_1 + x_2^2, x_2^2, x_1).$$

Nyt voidaan muodostaa yhdistetty kuvaus $f \circ g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Kuvaukseksi $f \circ g$ saadaan

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x_1, x_2) &= f(g(x_1, x_2)) = f((x_1 + x_2^2, x_2^2, x_1)) \\ &= x_1 + (x_1 + x_2^2)^2 - 3(x_2^2)^3 \\ &= x_1 + x_1^2 + x_2^4 + 2x_1x_2^2 - 3x_2^6. \end{aligned}$$

2.1 Kahden muuttujan funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Määritelmä 2.1.1 Olkoon $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$. Tällöin $b \in \mathbf{R}$ on funktion $f : B(\overline{a}, r) \setminus \{\overline{a}\} \to \mathbf{R}$ *raja-arvo pisteessä* $\overline{a}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$|\, f(\overline{x}) - b\,| < \varepsilon$$

aina kun $0 < |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = b.$$

Esimerkki (a) Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{0}} f(\overline{x}) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Arvioidaan lauseketta

$$|\, f(\overline{x}) - 0 \,| = |\, f(\overline{x}) \,|$$

kirjoittamalla

$$|\, f(\overline{x}) \,| = \left| \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{x_1^2 + x_2^2} = (x_1^2 + x_2^2) = |\, \overline{x} \,|^2 .$$

Koska $|\overline{x}|^2 < \varepsilon$ jos ja vain jos $|\overline{x}| < \sqrt{\varepsilon}$, valitsemalla $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$ saadaan

$$|\overline{x} - \overline{0}| < \delta \Rightarrow |\overline{x} - \overline{0}| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |\overline{x} - \overline{0}|^2 < \varepsilon \Rightarrow |f(\overline{x}) - \overline{0}| < \varepsilon.$$

Esimerkki 2.1.2 Tasossa $\mathbf{R}^2$ raja-arvotarkasteluissa tarpeellisia arvioita saa usein kätevästi *napakoordinaattien* avulla. Olkoon $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\overline{x} \neq \overline{0}$. Tällöin

$$x_1 = r \cos \varphi \quad \text{ja} \quad x_2 = r \sin \varphi,$$

missä $r = |\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on vektorin $\overline{x}$ normi ja $\varphi \in [0, 2\pi[$ on vektorin $\overline{x}$ *vaihekulma* (=vektorien $\overline{i}$ ja $\overline{x}$ välinen kulma positiivisen suuntaan eli vastapäivään).

(a) Tarkastellaan edellisen esimerkin funktiota

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Sijoittamalla $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, saadaan

$$f(\overline{x}) = \frac{(r^2 \cos^2 \varphi)(r^2 \sin^2 \varphi)}{r^2} = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \leq r^2 = |\overline{x}|^2$$

kaikilla $\overline{x} \neq 0$.

(b) Olkoon

$$f(x, y) = y^2 - y^4 - x^2$$

Sijoittamalla $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, saadaan

$$f(x, y) = r^2 (\sin^2 \varphi - r^2 \sin^4 \varphi - \cos^2 \varphi).$$

Kun $0 < r < 1$, niin

$$|\sin^2 \varphi - r^2 \sin^4 \varphi - \cos^2 \varphi| \leq |\sin^2 \varphi| + |r^2 \sin^4 \varphi| + |\cos^2 \varphi| \leq 3.$$

Saadaan arvio

$$|f(x, y) - 0| \leq 3r^2 = 3|(x, y) - (0, 0)|^2,$$

josta helposti nähdään, että $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Nimittäin kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$|f(x,y) - 0| \leq 3|(x,y) - (0,0)|^2 < \varepsilon$$

aina kun

$$0 < |(x,y) - (0,0)| < \min\left\{1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right\} =: \delta.$$

Raja-arvoja tasossa tarkastellaan usein esimerkiksi pitkin käyriä. Tämän vuoksi tarvitsemme yleisemmän raja-arvon määritelmän.

Määritelmä 2.1.3 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ ja olkoon $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ joukon A kasaantumispiste. Tällöin reaaliluku $b \in \mathbf{R}$ on funktion $f : A \to \mathbf{R}$ *raja-arvo pisteessä $\overline{a}$ joukossa* A, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$|\, f(\overline{x}) - b\,| < \varepsilon$$

aina kun $\overline{x} \in A$ ja $0 < |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A}} f(\overline{x}) = b.$$

Huomautus 2.1.4 Jos

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b,$$

niin

$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A}} f(\overline{x}) = b$$

jokaisessa joukossa $A \subset \mathbf{R}^2$, jolle $\overline{a}$ on kasaantumispiste. Tämä seuraa välittömästi määritelmistä.

Esimerkki 2.1.5 Tarkastellaan funktiota

$$f(x,y) = \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Jos $x = 0$, niin

$$f(x,y) = f(0,y) = \frac{y^4}{y^4} = 1,$$

joten raja-arvo origossa joukossa $A = \{\,(0,y) \mid y \neq 0\,\}$ on 1. Jos $y = kx$, $k \in \mathbf{R}$, niin vastaavasti

$$f(x,y) = \frac{k^4x^4 - 2k^2x^3 + x^2}{k^4x^4 + x^2} = \frac{k^4x^2 - 2k^2x + 1}{k^2x^2 + 1} \longrightarrow 1,$$

kun $x \to 0$. Siis raja-arvo origossa joukossa

$$A_k = \{\, (x, kx) \mid x \neq 0 \,\}$$

on 1 kaikilla $k \in \mathbf{R}$.

Jos $x = y^2$, niin

$$f(x,y) = \frac{(y^2 - y^2)^2}{y^4 + y^4} = 0.$$

Siis raja-arvo origossa joukossa $A = \{\, (y^2, y) \mid y \neq 0 \,\}$ on 0. Tästä seuraa, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa (Määritelmän 2.1.1 mielessä). Nimittäin Huomautuksen 2.1.4 mukaan funktiolla f on origossa sekä raja-arvot 0 että 1, mikä ei ole mahdollista koska raja-arvo on yksikäsitteinen. (Raja-arvon yksikäsitteisyys on intuitiivisesti ilmeistä ja myöskin helppo todistaa kolmioepäyhtälön avulla. Todistus kuitenkin sivuutetaan.)

Esimerkki 2.1.6 Tarkastelemalla raja-arvoja suorilla saadaan ainoa mahdollinen ehdokas funktion raja-arvoksi.

(a) Olkoon

$$f(x,y) = (\cos x)(\cos y)e^{-\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Määrätään raja-arvo origossa pitkin x-akselia. Saadaan

$$f(x,0) = (\cos x)e^{-\frac{1}{4}\sqrt{x^2}},$$

joten kosinin ja eksponenttifunktion jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = f(0,0) = 1.$$

Määrätään raja-arvo pisteessä $(0, \frac{\pi}{2})$ pitkin y-akselia. Saadaan vastaavasti

$$f(0,y) = (\cos y)e^{-\frac{1}{4}\sqrt{y^2}},$$

joten

$$\lim_{y \to \frac{\pi}{2}} f(0,y) = f(0, \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Myöhemmin nähdään, miksi raja-arvoväitteet pätevät myös Määritelmän 2.1.1 mielessä.

(b) Olkoon

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + xy + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Määrätään funktion f raja-arvo origossa. Suoralla $y = 0$ saadaan $f(x, 0) = 0$ kun $x \neq 0$, joten ainoa mahdollinen raja-arvo origossa on nolla. Todistetaan väite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Sijoittamalla $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, saadaan

$$f(x, y) = r^2 \left(\frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{1 + \sin\varphi\cos\varphi} \right).$$

Merkitään

$$F(\varphi) := \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{1 + \sin\varphi\cos\varphi}.$$

Reaalifunktio F on jatkuva suljetulla välillä $[0, 2\pi]$, joten F saa välillä $[0, 2\pi]$ pienimmän ja suurimman arvonsa. Näin ollen on olemassa luku $M > 0$ siten, että $|F(\varphi)| \leq M$ kaikilla $\varphi \in [0, 2\pi]$. Saadaan arvio

$$|f(x, y) - 0| \leq Mr^2 = M|(x, y) - (0, 0)|^2,$$

joten $0 < |(x, y) - (0, 0)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ seuraa $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

Määritelmä 2.1.7 Olkoon $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$. Kuvauksella $f : B(\overline{a}, r) \setminus \{\overline{a}\} \to \mathbf{R}^2$ on raja-arvo $\overline{b} = (b_1, b_2)$ pisteessä $\overline{a}$ jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(\overline{x}) - \overline{b}| < \varepsilon$$

aina kun

$$0 < |\overline{x} - \overline{a}| < \delta.$$

Vastaavasti määritellään raja-arvo joukossa A, kun $\overline{a}$ on joukon A kasaantumispiste.

Kaksiarvoisen kuvauksen raja-arvokysymys voidaan muuntaa kahden reaalifunktion raja-arvokysymykseksi seuraavasti:

Lause 2.1.8 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ ja olkoon $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ joukon A kasaantumispiste. Tällöin funktiolle $f : A \to \mathbf{R}^2$ pätee

$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a} \\ \overline{x}\in A}} f(\overline{x}) = \overline{b} = (b_1, b_2)$$

jos ja vain jos koordinaattikuvauksille f_1 ja f_2

$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a} \\ \overline{x}\in A}} f_1(\overline{x}) = b_1 \quad \text{ja} \quad \lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a} \\ \overline{x}\in A}} f_2(\overline{x}) = b_2.$$

Todistus. Oletetaan, että
$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A}} f(\overline{x}) = \overline{b}.$$
Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\left| f(\overline{x}) - \overline{b} \right| < \varepsilon$ aina kun $0 < |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < \delta$ ja $\overline{x} \in A$. Tällöin
$$|\, f_i(\overline{x}) - b_i \,| = \sqrt{|\, f_i(\overline{x}) - b_i \,|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{2} |\, f_j(\overline{x}) - b_j \,|^2} = \left| f(\overline{x}) - \overline{b} \right| < \varepsilon$$
aina kun $0 < |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < \delta$ ja $\overline{x} \in A$. Siis on osoitettu, että
$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A}} f_i(\overline{x}) = b_i, \quad i = 1, 2.$$
Oletetaan kääntäen, että
$$\lim_{\substack{\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A}} f_i(\overline{x}) = b_i, \quad i = 1, 2.$$
Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$, siten, että
$$0 < |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < \delta_i \text{ ja } \overline{x} \in A \Rightarrow |\, f_i(\overline{x}) - b_i \,| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Olkoon $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Jos nyt $0 < |\,\overline{x} - \overline{a}\,| < \delta$ ja $\overline{x} \in A$, niin kolmio-epäyhtälön nojalla
$$\left| f(\overline{x}) - \overline{b} \right| \leq |\, f_1(\overline{x}) - b_1 \,| + |\, f_1(\overline{x}) - b_1 \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
□

Lause 2.1.9 Olkoon $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ ja olkoot $f, g : B(\overline{a}, r) \setminus \{\overline{a}\} \to \mathbf{R}$ funktiota, joille
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b \in \mathbf{R} \quad \text{ja} \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = c \in \mathbf{R}.$$
Tällöin

(a) $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} (f(\overline{x}) + g(\overline{x})) = b + c$,

(b) $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \lambda f(\overline{x}) = \lambda b$ kaikilla $\lambda \in \mathbf{R}$,

(c) $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x})g(\overline{x}) = bc$,

(d) Jos $c \neq 0$, niin $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{b}{c}$.

Todistus. Väitteet todistetaan samalla tavoin kuin vastaavat väitteet on todistettu Analyysi I:ssä. Ainoa olennainen ero on siinä, että yksiuloitteisen etäisyyden $|x - a|$ sijaan tarkastellaan kaksiulotteista etäisyyttä $|\overline{x} - \overline{a}|$. $\square$

Huomautus 2.1.10 Lauseen 2.1.9 kohtien (a) ja (b) vastineet pätevät myös kaksiarvoisille kuvauksille. Tämä todetaan helposti yhdistämällä lauseet 2.1.8 ja 2.1.9.

Määritelmä 2.1.11 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Tällöin funktio $f : U \to \mathbf{R}$ on *jatkuva pisteessä* $\overline{a} \in U$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$| f(\overline{x}) - f(\overline{a}) | < \varepsilon$$

aina kun

$$| \overline{x} - \overline{a} | < \delta.$$

Funktio f on *jatkuva joukossa* U jos se on jatkuva jokaisessa joukon U pisteessä. Kaksiarvoisen funktion jatkuvuus pisteessä $\overline{a} \in U$ ja joukossa U määritellään samalla tavoin.

Huomautus 2.1.12 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Funktion $f : U \to \mathbf{R}$ jatkuvuus pisteessä $\overline{a} \in U$ tarkoittaa siis sitä, että

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a}).$$

Jos $f : U \to \mathbf{R}$ ja $g : U \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia pisteessä $\overline{a} \in U$, niin Lauseen 2.1.9 seurauksena funktiot $f + g$ ja fg ovat jatkuvia pisteessä $\overline{a}$. Myös f/g on jatkuva pisteessä $\overline{a}$ edellyttäen, että $g(\overline{a}) \neq 0$. Lauseesta 2.1.8 seuraa, että kaksiarvoinen funktio on jatkuva pisteessä $\overline{a}$ täsmälleen silloin kun sen koordinaattifunktiot ovat jatkuvia pisteessä $\overline{a}$.

Esimerkki 2.1.13 (a) Osoitetaan, että funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(\overline{x}) = x_1,$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$. Tätä varten, olkoon $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ ja osoitetaan, että

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a}) = a_1.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| = |x_1 - a_1| \leq |\overline{x} - \overline{a}|.$$

Siis $|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < \varepsilon$ jos $|\overline{x} - \overline{a}| < \varepsilon := \delta$.

(b) Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, missä

$$f(\overline{x}) = g(x_1)$$

ja $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva. Tällöin f on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$. Väitteen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi, vertaa (a). Luonnollisesti vastaava väite pätee jos $f(\overline{x}) = g(x_2)$, missä g on jatkuva reaalifunktio.

(c) Kohdan (b) nojalla esimerkiksi funktiot

$$(x, y) \mapsto \cos x, \quad (x, y) \mapsto e^y, \quad (x, y) \mapsto x^2, \quad (x, y) \mapsto 5y^4 + 2y^2,$$

ovat jatkuvia joukossa $\mathbf{R}^2$. Lauseen 2.1.9 seurauksena myös funktio

$$(x, y) \mapsto 3(\cos x)e^y + 5y^4 + 2y^2$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$. Vastaavasti esimerkiksi funktio $g : A \to \mathbf{R}$,

$$g(x, y) = \frac{3xy + y + \pi x^2}{x^2 - y^2},$$

on jatkuva joukossa $A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \neq y^2 \,\}$. Huomaa, että A on avoin, sillä yleisesti pätee: alkukuvajoukko $\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \neq g(x, y) \,\}$ on avoin aina kun $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ja $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia. Tämän todistaminen sivuutetaan.

(d) Määrätään

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}.$$

Joukossa $A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq y \,\}$ pätee

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2}{x - y} = x - y.$$

Koska funktio $(x, y) \mapsto x - y$ on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$, niin

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} (x - y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x - y) = 1 - 1 = 0.$$

Jatkuvuus säilyy myös jatkuvia kuvauksia yhdistettäessä:

Lause 2.1.14 Olkoot $n, m, k \in \mathbf{N}$ ja olkoot $U \subset \mathbf{R}^n$ ja $V \subset \mathbf{R}^m$ avoimia. Jos kuvaus $f : U \to V$ on jatkuva pisteessä $\overline{a} \in U$ ja kuvaus $g : V \to \mathbf{R}^k$ on jatkuva pisteessä $f(\overline{a}) \in V$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : U \to \mathbf{R}^k$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

on jatkuva pisteessä $\overline{a}$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jatkuvuusoletusten mukaan on olemassa luvut $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|\overline{y} - f(\overline{a})| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(\overline{a})) - g(\overline{y})| < \varepsilon$$

ja

$$|\overline{x} - \overline{a}| < \delta_2 \Rightarrow |f(\overline{a}) - f(\overline{x})| < \delta_1.$$

Siis

$$|\overline{x} - \overline{a}| < \delta_2 \Rightarrow |f(\overline{a}) - f(\overline{x})| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(\overline{a})) - g(f(\overline{x}))| < \varepsilon.$$

□

Esimerkki 2.1.15 (a) Esimerkiksi funktio

$$f(x, y) = (\cos x)(\cos y)e^{-\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}}$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$ lauseiden 2.1.14 ja 2.1.9 seurauksena. Näin ollen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} f(x, y) = f(0, \frac{\pi}{2}) = 0,$$

vertaa Esimerkki 2.1.6 (a).

(b) Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = (x^2, y)$. Funktio f on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$ ja sen iteraateille pätee

$$\begin{aligned}
f^2(x, y) &= (f \circ f)(x, y) = f(x^2, y) = (x^4, y) \\
f^3(x, y) &= (f \circ f \circ f)(x, y) = f(f^2(x^2, y)) = f(x^4, y) = (x^8, y) \\
&\vdots \\
f^n(x, y) &= \underbrace{(f \circ \ldots \circ f)}_{\text{n kappaletta}}(x, y).
\end{aligned}$$

Kaikki iteraatit f^n ovat jatkuvia joukossa $\mathbf{R}^2$ Lauseen 2.1.14 nojalla.

Huomautus Luvun 2 keskeiset määritelmät ja tulokset voidaan helposti yleistää mielivaltaiseen dimensioon. Erityisesti lauseiden 2.1.8 ja 2.1.9 vastineet pätevät n:n muuttujan funktioille.

3 Differentiaalilaskenta

3.1 Osittaisderivaatta

Määritelmä 3.1.1 Olkoon $\overline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ ja olkoon $f : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}$ pisteen $\overline{a}$ ympäristössä määritelty funktio. Jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$D_1 f(\overline{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

niin tätä sanotaan funktion f *ensimmäiseksi osittaisderivaataksi (osittaisderivaataksi ensimmäisen muuttujan suhteen) pisteessä* $\overline{a}$. Vastaavasti f:n *toinen osittaisderivaatta (osittaisderivaatta toisen muuttujan suhteen) pisteessä* $\overline{a}$ määritellään raja-arvona

$$D_2 f(\overline{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

mikäli kyseinen raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Jos derivaatat $D_1 f(\overline{a})$ ja $D_2 f(\overline{a})$ ovat olemassa, kahden muuttujan funktio f on *derivoituva pisteessä* $\overline{a}$. Jos funktio f on derivoituva avoimen joukon $U \subset \mathbf{R}^2$ jokaisessa pisteessä, sanotaan että f on *derivoituva joukossa* U.

Esimerkki (a) Olkoon $f(x, y) = x^2 y^3$. Määrätään $D_1 f(1, 2)$ ja $D_2 f(1, 2)$ Määritelmästä 3.1.1. Nyt

$$\frac{f(1 + h, 2) - f(1, 2)}{h} = 8 \left(\frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} \right) \to 8(2 \cdot 1) = 16 = D_1 f(1, 2),$$

kun $h \to 0$, sillä $\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$ on reaalifunktion $x \mapsto x^2$ erotusosamäärä pisteessä 1. Vastaavasti

$$\frac{f(1, 2 + h) - f(1, 2)}{h} = \frac{(2 + h)^3 - 2^3}{h} \to 3(2^2) = 12 = D_2 f(1, 2),$$

kun $h \to 0$, sillä $\frac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$ on reaalifunktion $x \mapsto x^3$ erotusosamäärä pisteessä 2. Yleisesti pätee

$$D_1 f(x, y) = 2xy^3, \quad D_2 f(x, y) = 3x^2 y^2,$$

ks. Huomautus 3.1.2 alla.

(b) Olkoon $f(\overline{x}) = |\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Onko f derivoituva origossa? Nyt

$$\frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h},$$

jolla ei ole raja-arvoa, kun $h \to 0$ (vasemmanpuoleinen raja-arvo on -1, oikeanpuoleinen 1). Siis lukua $D_2 f(0,0)$ ei ole olemassa. Vastaavasti nähdään, että lukua $D_1 f(0,0)$ ei ole olemassa.

Huomautus 3.1.2 Olkoon $f : U \to \mathbf{R}$ määritelty avoimessa joukossa $U \subset \mathbf{R}^2$ ja määritellään kiinnitetyllä y:n arvolla yhden muuttujan funktio

$$g(x) := f(x,y)$$

(tässä x saa arvoja siten, että $(x,y) \in U$). Jos g on derivoituva pisteessä x, niin

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = D_1 f(x,y).$$

Havaitaan, että $D_1 f(x,y)$, $(x,y) \in U$, saadaan yhden muuttujan funktion derivoinnilla pitämällä y vakiona ja derivoimalla muuttujan x suhteen. Vastaavasti $D_2 f(x,y)$ saadaan pitämällä x vakiona ja derivoimalla muuttujan y suhteen tavanomaiseen tapaan. Koska osittaisderivaatat voidaan tulkita yhden muuttujan funktion derivaatoiksi, seuraavat derivoimiskaavat ovat voimassa:

(a) $D_i(f+g)(x,y) = D_i f(x,y) + D_i g(x,y)$,

(b) $D_i(\lambda f)(x,y) = \lambda D_i f(x,y)$,

(c) $D_i(fg)(x,y) = (D_i f(x,y))g(x,y) + f(x,y) D_i g(x,y)$,

(d) $D_i(\frac{f}{g})(x,y) = [(D_i f(x,y))g(x,y) - f(x,y)D_i g(x,y)] \cdot g(x,y)^{-2}$,

missä $\lambda \in \mathbf{R}$ ja $i = 1,2$.

Merkintä Jatkossa käytetään myös klassisia merkintöjä

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = D_1 f(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = D_2 f(x,y).$$

Kirjallisuudessa käytetään myös esimerkiksi merkintöjä $f_x(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a})$ ja $f_y(\overline{a}) = D_2 f(\overline{a})$. Kun osittaisderivaatat ovat olemassa jossakin avoimessa joukossa, puhutaan derivaattafunktiosta $D_1 f$, $D_2 f$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ jne.

Esimerkki 3.1.3 (a) Jos

$$f(x,y) = x^3 y^2 + x^4 \sin y,$$

niin Huomautuksen 3.1.2 nojalla kaikilla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ pätee

$$D_1 f(x,y) = 3y^2x^2 + 4x^3 \sin y, \quad D_2 f(x,y) = 2yx^3 + x^4 \cos y.$$

Jos

$$g(x,y) = y^2 + e^{xy},$$

niin kaikilla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

$$D_1 g(x,y) = 0 + e^{xy} \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = e^{xy} y$$

ja

$$D_2 g(x,y) = 2y + e^{xy} \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = 2y + e^{xy} x.$$

(b) Olkoon

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{kun } (x,y) = (1,0) \\ \frac{xy^3}{(x-1)^2+y^2}, & \text{kun } (x,y) \neq (1,0). \end{cases}$$

Pisteen $(1,0)$ ulkopuolella osittaisderivaatoiksi saadaan

$$D_1 f(x,y) = \frac{y^3[(x-1)^2+y^2] - 2(x-1)xy^3}{[(x-1)^2+y^2]^2}$$

ja

$$D_2 f(x,y) = \frac{3xy^2[(x-1)^2+y^2] - 2y(xy^3)}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$

Suora derivoiminen ei onnistu pisteessä $(1,0)$, joten derivaattoja on tarkasteltava Määritelmän 3.1.1 pohjalta. Saadaan

$$D_1 f(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

ja

$$D_2 f(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^2 h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Useamman muuttujan funktion osittaisderivaatat

Olkoon funktio f määritelty pisteen $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ympäristössä ja olkoon $j \in \{1, \ldots, n\}$. Jos raja-arvo

$$D_j f(\overline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{h}$$

on äärellisenä olemassa, sitä sanotaan f:n *osittaisderivaataksi j:nen muuttujan suhteen.*

Esimerkki Funktion

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_3 + \sin(x_2 + x_4) + e^{x_1 + x_4}$$

osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned}
D_1 f(\overline{x}) &= 2x_1x_3 + 0 + e^{x_1+x_4} \cdot \underbrace{D_1(x_1 + x_4)}_{=1} = 2x_1x_3 + e^{x_1+x_4}, \\
D_2 f(\overline{x}) &= 0 + \cos(x_2 + x_4) + 0 = \cos(x_2 + x_4), \\
D_3 f(\overline{x}) &= x_1^2, \\
D_4 f(\overline{x}) &= \cos(x_2 + x_4) + e^{x_1+x_4}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.1.4 Yhden muuttujan funktioiden teoriasta poiketen kahden muuttujan funktioille derivoituvuus pisteessä ei takaa edes jatkuvuutta pisteessä. Olkoon

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \text{ tai } y = 0 \\ 0, & \text{muulloin joukossa } \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Ilmeisestikään funktio f ei ole jatkuva origossa, sillä f saa jokaisessa origon ympäristössä sekä arvon 0 että arvon 1. Kuitenkin

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

ja vastaavasti $D_2 f(0,0) = 0$. Jatkossa määritelläänkin osittaisderivaattoja vahvempi derivoituvuuden käsite, differentioituvuus, joka takaa mm. jatkuvuuden.

Määritelmä 3.1.5 Olkoon $f : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}$ derivoituva pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$. Tällöin funktion f *gradientti* pisteessä $\overline{a}$ on vektori

$$\nabla f(x,y) = (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)).$$

Myöhemmin kurssilla havaitaan, että gradientin normilla $|\nabla f(x,y)|$ on tärkeä rooli funktion käyttäytymistarkasteluissa.

Esimerkki 3.1.6 (a) Olkoon

$$f(\overline{x}) = e^{|\overline{x}|} = e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

kun $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Lasketaan $|\nabla f(\overline{x})|$. Osittaisderivaatoiksi saadaan

$$D_1 f(\overline{x}) = e^{|\overline{x}|}[\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1], \quad D_2 f(\overline{x}) = e^{|\overline{x}|}[\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_2],$$

joten

$$\begin{aligned} |\nabla f(\overline{x})| &= \sqrt{D_1 f(\overline{x})^2 + D_2 f(\overline{x})^2} \\ &= \sqrt{e^{2|\overline{x}|}(x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^{-1} + x_2^2(x_1^2 + x_2^2)^{-1})} \\ &= e^{|\overline{x}|}. \end{aligned}$$

(b) Olkoon $f(\overline{x}) = |\overline{x}|^\alpha$, missä $\alpha > 0$ ja $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Tällöin

$$|\nabla f(\overline{x})| = \alpha |\overline{x}|^{\alpha - 1}$$

kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Tämän osoittaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Kohtien (a) ja (b) funktiot ovat esimerkkejä *radiaalisista funktioista*, so. funktioista, jotka riippuvat vain normista $|\overline{x}|$. Tällaisia funktiota on helppo käsitellä ja ne ovat useamman muuttujan analyysissä tärkeitä.

3.2 Differentioituvuus

Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$ derivoituva reaalifunktio. Muodostetaan erotusosamäärän avulla erotuksen h funktio

$$\varepsilon(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), \quad h \neq 0.$$

Tällöin $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ ja funktion arvojen erotukselle saadaan esitys

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\varepsilon(h).$$

Tämän esityksen vastine otetaan *differentioituvuuden* määritelmäksi useamman muuttujan funktioille:

Määritelmä 3.2.1 Funktio $f : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}$ on *differentioituva pisteessä* $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$, jos on olemassa luvut $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ ja $\alpha_2 \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \left|\overline{h}\right| \varepsilon(\overline{h}) \tag{3}$$

ja ε on jossakin origon punkteeratussa ympäristössä määritelty vektorin $\overline{h} = (h_1, h_2)$ funktio, jolle

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0.$$

Funktio $f : U \to \mathbf{R}$ on *differentioituva avoimessa joukossa* $U \subset \mathbf{R}^2$, jos f on differentioituva jokaisessa pisteessä $\overline{a} \in U$.

Huomaa, että merkitsemällä $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ yhtälö (3) saadaan pistetuloa käyttäen muotoon

$$f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) = \overline{\alpha}\cdot\overline{h} + \left|\,\overline{h}\,\right|\varepsilon(\overline{h}).$$

Lause 3.2.2 Jos funktio f on differentioituva pisteessä $\overline{a}$, niin f on derivoituva pisteessä $\overline{a}$ ja

$$D_1f(\overline{a}) = \alpha_1, \quad D_2f(\overline{a}) = \alpha_2.$$

Todistus. Todistetaan ensimmäistä osittaisderivaattaa koskeva väite. Oletuksen mukaan funktiolla f on esitys

$$f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) = \alpha_1h_1 + \alpha_2h_2 + \left|\,\overline{h}\,\right|\varepsilon(\overline{h}), \tag{4}$$

missä $\varepsilon(\overline{h}) \to 0$ kun $\overline{h} \to \overline{0}$. Valitaan $\overline{h} = (h_1, 0)$, missä $h_1 \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ on niin pieni, että esitys (4) pätee vektorille $\overline{h}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{h_1} &= \frac{f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})}{h_1} = \frac{\alpha_1h_1}{h_1} + \frac{\left|\,\overline{h}\,\right|}{h_1}\varepsilon(\overline{h}) \\ &= \alpha_1 \pm \varepsilon(\overline{h}) \longrightarrow \alpha_1,\end{aligned}$$

kun $\overline{h} \to \overline{0}$. Siis

$$D_1f(\overline{a}) = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{h_1} = \alpha_1.$$

Toista osittaisderivaattaa koskeva väite käsitellään vastaavasti. $\square$

Lause 3.2.3 Jos $f : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}$ on differentioituva pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$, niin f on jatkuva pisteessä $\overline{a}$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. On löydettävä $\delta > 0$ siten, että

$$|\,f(\overline{x}) - f(\overline{a})\,| < \varepsilon, \text{ kun } |\,\overline{x}-\overline{a}\,| < \delta.$$

Oletuksen mukaan funktiolla f on esitys

$$f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) = \alpha_1h_1 + \alpha_2h_2 + \left|\,\overline{h}\,\right|\varepsilon(\overline{h}),$$

missä $\varepsilon(\overline{h}) \to 0$ kun $\overline{h} \to \overline{0}$. Koska $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}}\varepsilon(\overline{h}) = 0$, löydetään $\delta' > 0$ siten, että $|\,\varepsilon(h)\,| < 1$ kun $\left|\,\overline{h}\,\right| < \delta'$. Valitaan $\delta = \min\left(\delta', \frac{\varepsilon}{|\,\overline{\alpha}\,|+1}\right)$. Jos nyt $|\,\overline{x}-\overline{a}\,| < \delta$, niin Schwarzin epäyhtälön (Lause 1.0.4) nojalla (merkitään $\overline{h} = \overline{x}-\overline{a}$)

$$\begin{aligned}|\,f(\overline{x}) - f(\overline{a})\,| &= \left|\,f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a})\,\right| = \left|\,\overline{\alpha}\cdot\overline{h} + \left|\,\overline{h}\,\right|\varepsilon(\overline{h})\,\right| \\ &\le \left|\,\overline{\alpha}\cdot\overline{h}\,\right| + \left|\,\overline{h}\,\right|\left|\,\varepsilon(\overline{h})\,\right| \le \left|\,\overline{h}\,\right|\Big(\,|\,\overline{\alpha}\,| + \left|\,\varepsilon(\overline{h})\,\right|\Big) \\ &\le |\,\overline{x}-\overline{a}\,|\Big(\,|\,\overline{\alpha}\,|+1\Big) < \delta\Big(\,|\,\overline{\alpha}\,|+1\Big) \le \tfrac{\varepsilon}{|\,\overline{\alpha}\,|+1}\,(\,|\,\overline{\alpha}\,|+1) = \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Huomautus 3.2.4 Koska differentioituvuudesta seuraa jatkuvuus (Lause 3.2.3), mutta derivoituvuudesta ei yleisesti seuraa jatkuvuus (Esimerkki 3.1.4), on selvää, että derivoituvuudesta *ei seuraa yleisesti* differentioituvuus.

Lause 3.2.5 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Jos funktion $f : U \to \mathbf{R}$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia joukossa U, niin f on differentioituva joukossa U.

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. esimerkiksi Persson-Böiers: Analys i flera variabler, sivut 47-48. $\square$

Lause 3.2.5 on keskeinen apukeino sen toteamiseksi, että funktio on annetussa pisteessä differentioituva!

Esimerkki 3.2.6 (a) Onko funktio $f(x,y) := x^2y + xy$ differentioituva origossa? Laskemalla osittaisderivaatat saadaan

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xy + y, \\ D_2 f(x,y) &= x^2 + x. \end{aligned}$$

Koska osittaisderivaatat ovat jatkuvia joukossa $\mathbf{R}^2$, f on kaikkialla differentioituva. Erityisesti f on differentioituva origossa.

(b) Onko funktio $f(x,y) := x^2|y| + xy$ differentioituva origossa? Ensimmäiseksi osittaisderivaataksi saadaan $D_1 f(x,y) = 2x|y| + y$, joten $D_1 f(0,0) = 0$. Toinen osittaisderivaatta origossa on laskettava määritelmän avulla. Saadaan

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Funktio f on siis derivoituva origossa. Funktio f on differentioituva origossa, jos

$$f(\overline{0} + \overline{h}) - f(\overline{0}) = D_1 f(\overline{0}) h_1 + D_2 f(\overline{0}) h_2 + |\overline{h}| \varepsilon(\overline{h}),$$

missä

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0.$$

Ratkaistaan $\varepsilon(\overline{h})$ ja tutkitaan sen käyttäytymistä, kun $\left|\overline{h}\right| \to 0$. Funktioksi $\varepsilon(\overline{h})$ saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon(\overline{h}) &= \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0)}{\left|\overline{h}\right|} \\ &= \frac{h_1^2 |h_2| + h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla napakoordinaatit $h_1 = r\cos\varphi$, $h_2 = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, saadaan arvio

$$|\varepsilon(\overline{h}) - 0| = \frac{|r^2\cos^2\varphi|r\sin\varphi| + (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)|}{r} \leq 2r,$$

kun $0 < r \leq 1$. Tästä seuraa rutiininomaisella ε−δ-päättelyllä, että $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0$, ks. luku 2. Siis f on differentioituva origossa.

(c) Onko funktio $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ differentioituva origossa? Nyt osittaisderivaatat origossa on laskettava määritelmästä. Jälleen

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

ja myös $D_2 f(0,0) = 0$. Tässä tapauksessa funktioksi $\varepsilon(\overline{h})$ saadaan

$$\begin{aligned}\varepsilon(\overline{h}) &= \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0)}{\left|\overline{h}\right|} \\ &= \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}},\end{aligned}$$

mutta nyt lausekkeella $\varepsilon(\overline{h})$ ei ole raja-arvoa origossa. Nimittäin suoralla $h_1 = 0$ pätee $\varepsilon(\overline{h}) = 0$ ja suoralla $h_1 = h_2$ pätee $\varepsilon(\overline{h}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Siis f ei ole differentioituva origossa, koska ε-funktioon liittyvä ehto ei päde.

Differentiaali

Olkoon f differentioituva pisteessä $\overline{a} \in U$. Tällöin lauseketta

$$df(\overline{a})(\overline{h}) := D_1 f(\overline{a}) h_1 + D_2 f(\overline{a}) h_2$$

sanotaan (lisäykseen $\overline{h}$ liittyväksi) funktion f *differentiaaliksi pisteessä* $\overline{a}$. Differentioituvuuden määritelmästä seuraa, että

$$\triangle f = f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) \approx df(\overline{a})(\overline{h}),$$

kun $\overline{h}$ on "hyvin pieni".

Esimerkki Funktion $f(x,y) = x^3 y^2$ osittaisderivaatat ovat

$$D_1 f = 3x^2 y^2 \quad \text{ja} \quad D_2 f = 2x^3 y.$$

Jos $\overline{a} = (a_1, a_2) = (1, 2)$ ja $\overline{h} = (h_1, h_2) = (-0.04, 0.05)$, niin differentiaaliksi saadaan

$$df(\overline{a})(\overline{h}) = D_1 f(1,2) \cdot (-0.04) + D_2 f(1,2) \cdot 0.05 = 12(-0.04) + 4(0.05) = -0.28$$

ja erotuksen $\triangle f$ tarkka arvo on

$$\triangle f = f(0.96, 2.05) - f(1,2) = 0.96^3 (2.05)^2 - 4 \approx -0.2819.$$

Esimerkki 3.2.7 Differentiaalia on perinteisesti käytetty *virhearvioinnissa*. Pyritään esimerkiksi määräämään maan vetovoiman kiihtyvyys g kokeellisesti mittaamalla putoamisaikaa t ja putoamismatkaa s, jolloin pätee

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{eli} \quad g = \frac{2s}{t^2}.$$

Mittaustulokset s ja t eroavat jonkin verran todellisista arvoista $s + h_1$, $s + h_2$. Tällöin g:n virhe on

$$\triangle g = g(s + h_1, t + h_2) - g(s,t) \approx dg(s,t)(\overline{h}) = \frac{\partial g}{\partial s} h_1 + \frac{\partial g}{\partial t} h_2 = \frac{2}{t^2} h_1 - \frac{4s}{t^3} h_2.$$

Jos tiedetään mittaustarkkuudet eli $|\, h_1 \,| \leq \delta$ (vakio) ja $|\, h_2 \,| \leq \tau$ (vakio), niin kolmioepäyhtälön seurauksena $|\triangle g|$ on likimäärin korkeintaan

$$\frac{2}{t^2} \delta + \frac{4s}{t^3} \tau.$$

3.3 Korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos derivaatta $D_j f$ on olemassa pisteen $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä ja $D_j f$ on derivoituva k:nen muuttujan suhteen, saadaan *toisen kertaluvun osittaisderivaatta* $D_{jk} f(\overline{a})$ ehdosta

$$D_{jk} f(\overline{a}) = D_k (D_j f)(\overline{a}),$$

missä $j, k \in \{\, 1, 2 \,\}$. Siis esimerkiksi

$$D_{12} f(\overline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{D_1 f(a_1, a_2 + h) - D_1 f(a_1, a_2)}{h}.$$

Esimerkki Funktion

$$f(x,y) := x^3 y^2 + x^4 \sin y + \cos(2x)$$

osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 3y^2x^2 + 4x^3 \sin y - 2\sin(2x), \\ D_2 f(x,y) &= 2x^3 y + x^4 \cos y. \end{aligned}$$

Edelleen toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_{11} f(x,y) &= 6xy^2 + 12x^2 \sin y - 4\cos(2x), \\ D_{22} f(x,y) &= 2x^3 - x^4 \sin y, \\ D_{12} f(x,y) &= D_2(D_1 f(x,y)) = 6x^2 y + 4x^3 \cos y, \\ D_{21} f(x,y) &= D_1(D_2 f(x,y)) = 6x^2 y + 4x^3 \cos y. \end{aligned}$$

Havaitaan, että ehto $D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y)$ pätee!

Merkintä Olkoon $f : U \to \mathbf{R}$, missä $U \subset \mathbf{R}^2$ on avoin. Tällöin merkitään $f \in \mathbf{C}^1(U)$, jos $D_1 f$ ja $D_2 f$ ovat jatkuvia joukossa U. Edelleen merkitään $f \in \mathbf{C}^2(U)$, jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat $D_{11} f$, $D_{22} f$, $D_{12} f$ ja $D_{21} f$ ovat jatkuvia joukossa U.

Esimerkki 3.3.1 Olkoon

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x,y) \neq \bar{0} \\ 0 & \text{kun } (x,y) = \bar{0}. \end{cases}$$

Jos $(x,y) \neq (0,0)$, niin

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) = D_1 \left(\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

ja

$$D_2 f(x,y) = \ldots = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}. \tag{6}$$

Tuloksesta (5) seuraa

$$D_1 f(0,y) = \frac{0 \cdot y^3 + 0 \cdot y - y^5}{(0^2+y^2)^2} = \frac{-y^5}{y^4} = -y, \quad \text{kun } y \neq 0, \tag{7}$$

ja tuloksesta (6) saadaan

$$D_2 f(x,0) = \ldots = x, \quad x \neq 0. \tag{8}$$

Osittaisderivaatat origossa ovat

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0\cdot(h^2-0^2)}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \tag{9}$$

ja

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \ldots = 0. \tag{10}$$

Yhtälöistä (7) ja (9) saadaan edelleen

$$D_{12} f(0,0) = D_2(D_1 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1$$

ja yhtälöistä (8) ja (10) saadaan

$$D_{21} f(0,0) = D_1(D_2 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

Tämä osoittaa, että *aina ei päde* $D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y)$!

Lause 3.3.2 Jos $f \in \mathbf{C}^2(U)$, missä $U \subset \mathbf{R}^2$ on avoin, niin

$$D_{12} f(\overline{x}) = D_{21} f(\overline{x})$$

kaikilla $\overline{x} \in U$.

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. Persson-Böiers: Analys i flera variabler, sivut 74-75. $\square$

Esimerkki 3.3.3 Funktiota $f \in \mathbf{C}^2(U)$ sanotaan *harmoniseksi* avoimessa joukossa $U \subset \mathbf{R}^2$, jos f toteuttaa *Laplace-yhtälön*

$$\Delta f(\overline{x}) := D_{11} f(\overline{x}) + D_{22} f(\overline{x}) = 0$$

kaikilla $\overline{x} \in U$. Olkoon esimerkiksi

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 3x^2 - 3y^2, \\ D_2 f(x,y) &= -6xy, \\ D_{11} f(x,y) &= 6x, \\ D_{22} f(x,y) &= -6x. \end{aligned}$$

Siis

$$\Delta f(x,y) = D_{11}f(x,y) + D_{22}f(x,y) = 6x - 6x = 0$$

kaikilla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, joten f on harmoninen joukossa $\mathbf{R}^2$.

Mainittakoon, että mm. gravitaatio- ja sähkökenttäpotentiaalit toteuttavat Laplace-yhtälön $D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f = 0$ avaruudessa $\mathbf{R}^3$. Harmoniset funktiot ovat myöskin keskeisiä esimerkiksi kompleksianalyysissa. Laplace-yhtälö on esimerkki *osittaisdifferentiaaliyhtälöstä*.

Huomautus 3.3.4 (a) Differentioituvuus määritellään analogisella tavalla yleisesti useamman muuttujan funktiolle. Siis funktio $f : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}$ on *differentioituva pisteessä* $\overline{a} \in \mathbf{R}^n$, jos on olemassa luvut $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ siten, että

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n + \left|\overline{h}\right| \varepsilon(\overline{h})$$

ja ε on origon punkteeratussa ympäristössä määritelty vektorin $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ funktio, jolle

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0.$$

Funktio $f : U \to \mathbf{R}$ on *differentioituva avoimessa joukossa* $U \subset \mathbf{R}^n$, jos f on differentioituva jokaisessa pisteessä $\overline{a} \in U$. Lauseiden 3.2.2, 3.2.3 ja 3.2.5 vastineet pätevät kaikissa dimensioissa.

(b) Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat määritellään samaan tapaan n:n muuttujan funktioille. Lause 3.3.2 saa muodon: Jos $f \in \mathbf{C}^2(U)$, missä $U \subset \mathbf{R}^n$ on avoin, niin

$$D_{ij}f(\overline{x}) = D_{ji}f(\overline{x})$$

kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Esimerkki 3.3.5 Tarkastellaan kolmen muuttujan funktiota

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{|\overline{x}|} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$$

origon ulkopuolella. Jos $\overline{x} \neq \overline{0}$, niin

$$D_1 f(\overline{x}) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}(2x_1) = -x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Näin ollen

$$D_{13}f(\overline{x}) = D_3\left(-x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{5}{2}}(2x_3) = \frac{3x_1x_3}{|\overline{x}|^5}.$$

Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että f toteuttaa Laplace-yhtälön

$$D_{11}f(\overline{x}) + D_{22}f(\overline{x}) + D_{33}f(\overline{x}) = 0$$

origon ulkopuolella.

3.4 Gradientti ja suunnatut derivaatat

Olkoon $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ *yksikkövektori*, so.

$$|\overline{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = 1.$$

Tällöin joukko

$$\{\overline{a} + h\overline{\alpha} \mid h \in \mathbf{R}\}$$

muodostaa pisteen $\overline{a}$ kautta kulkevan vektorin $\overline{\alpha}$ suuntaisen suoran.

Määritelmä 3.4.1 Olkoon f pisteen $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen funktio. Jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{a} + h\overline{\alpha}) - f(\overline{a})}{h},$$

niin raja-arvoa $\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a})$ kutsutaan *funktion f derivaataksi suuntaan $\overline{\alpha}$ pisteessä $\overline{a}$.*

Huomautus 3.4.2 Määritelmistä 3.1.1 ja 3.4.1 nähdään välittömästi, että

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = D_1 f \quad \text{jos} \quad \overline{\alpha} = (1, 0)$$

ja

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = D_2 f \quad \text{jos} \quad \overline{\alpha} = (0, 1).$$

Siis osittaisderivaatat ovat suunnattuja derivaattoja koordinaattiakseleiden suuntaan.

Jos funktio on pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ differentioituva, suunnatut derivaatat pisteessä $\overline{a}$ saadaan gradientin $\nabla f(\overline{a}) = (D_1 f(\overline{a}), D_2 f(\overline{a}))$ avulla seuraavasti:

Lause 3.4.3 Olkoon f differentioituva pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$. Tällöin $\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a})$ on olemassa kaikille yksikkövektoreille $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}^2$ ja

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + D_2 f(\overline{a})\alpha_2 = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{\alpha}.$$

Todistus. Olkoon $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}^2$, $|\,\overline{\alpha}\,| = 1$. Differentioituvuuden määritelmän mukaan "pienille"lisäysvektoreille $\overline{h} = (h_1, h_2)$ pätee

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a})h_1 + D_2 f(\overline{a})h_2 + |\overline{h}|\varepsilon(\overline{h}),$$

missä $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0$. Sijoittamalla $\overline{h} = h\overline{\alpha}$ saadaan

$$f(\overline{a} + h\overline{\alpha}) - f(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a}) h\alpha_1 + D_2 f(\overline{a}) h\alpha_2 + |h|\,|\,\overline{\alpha}\,|\,\varepsilon(h\overline{\alpha}),$$

kun reaaliluku $h \neq 0$ on tarpeeksi pieni. Näin ollen erotusosamäärä suuntaan $\overline{\alpha}$ on

$$\frac{f(\overline{a} + h\overline{\alpha}) - f(\overline{a})}{h} = D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + D_2 f(\overline{a})\alpha_2 + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h\overline{\alpha}).$$

Koska $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h\overline{\alpha}) = 0$, niin

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{a} + h\overline{\alpha}) - f(\overline{a})}{h} = D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + D_2 f(\overline{a})\alpha_2.$$

□

Esimerkki Määrätään funktion

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

derivaatta pisteessä $(1, 1)$ suuntaan $(1, \sqrt{3})$. Koska Lausetta 3.4.3 voi soveltaa vain yksikkövektoreille, on suuntavektorin pituudeksi ensin normeerattava 1. Jakamalla vektori $(1, \sqrt{3})$ pituudellaan saadaan

$$\overline{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$D_1 f(x, y) = 2xy^3, \quad D_2 f(x, y) = 3x^2 y^2,$$

joten Lauseen 3.4.3 mukaan

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \overline{\alpha} = \frac{1}{2} D_1 f(1, 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} D_2 f(1, 1) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Gradientin geometrinen merkitys

Suunnatun derivaatan käsitteen avulla saadaan Schwarzin epäyhtälöä käyttäen tulkinta gradientin geometriselle merkitykselle. Nimittäin Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) \leq |\nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{\alpha}| \leq |\nabla f(\overline{a})||\overline{\alpha}| = |\nabla f(\overline{a})|.$$

Yhtäsuuruus

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{\alpha} = |\nabla f(\overline{a})||\overline{\alpha}|$$

pätee täsmälleen silloin kun vektorit $\nabla f(\overline{a})$ ja $\overline{\alpha}$ ovat samansuuntaisia. Tässä tapauksessa

$$\overline{\alpha} = t\nabla f(\overline{a})$$

jollekin $t > 0$. Mutta $\overline{\alpha}$ on yksikkövektori, joten välttämättä $t = \frac{1}{|\nabla f(\overline{a})|}$ ja siis

$$\overline{\alpha} = \frac{\nabla f(\overline{a})}{|\nabla f(\overline{a})|}.$$

On osoitettu, että gradientti antaa suunnan, johon funktio kasvaa/vähenee voimakkaimmin. Esimerkiksi (todellisuutta hieman idealisoiden) vesi virtaa alas mäkeä siten, että kussakin puron pisteessä mennään gradientin suuntaan, kun mäen pinta tulkitaan kahden muuttujan funktion kuvaajaksi.

Esimerkki 3.4.4 Useamman kuin kahden muuttujan tapauksessa suunnattu derivaatta määritellään analogisella tavalla kaikille yksikkövektoreille. Myös Lause 3.4.3 pätee yleisesti: Jos f on differentioituva pisteessä $\overline{a}$ ja $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, $|\overline{\alpha}| = 1$, niin

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(\overline{a}) = D_1 f(\overline{a})\alpha_1 + \cdots + D_n f(\overline{a})\alpha_n = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{\alpha}.$$

Lasketaan esimerkiksi funktion

$$f(x, y, z) = x^4 + x^3 y + 2x^2 z$$

derivaatta pisteessä $(1, 2, 5)$ vektorin $(4, -2, 2)$ suuntaan. Nyt vektorin $(4, -2, 2)$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{\alpha} = \frac{(4, -2, 2)}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) &= 4x^3 + 3x^2 y + 4xz, \\ D_2 f(x, y, z) &= x^3, \\ D_3 f(x, y, z) &= 2x^2, \end{aligned}$$

joten $\nabla f(1, 2, 5) = (30, 1, 2)$ ja

$$\partial_{\overline{\alpha}} f(1, 2, 5) = (30, 1, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{61}{\sqrt{6}}.$$

3.5 Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen

Derivaatan hyödyntäminen edellyttää sen tuntemista, miten yhdistettyjä funktioita derivoidaan useamman muuttujan tapauksessa. Tarkastellaan aluksi erikoistapausta, jossa yhdistetty kuvaus on yhden muuttujan funktio.

Esimerkki 3.5.1 Oletetaan, että piste (x, y) liikkuu tasossa ajan t funktiona siten, että kuvauksen

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

koordinaattifunktiot ovat derivoituvia. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differentioituva. Miten saadaan yhdistetyn funktion

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

derivaatta ajanhetkellä $t = t_0$? Tarkastellaan erotusosamäärää

$$\frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \frac{f(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0))}{h}.$$

Koska f on differentioituva pisteessä $(x(t_0), y(t_0))$, erotusosamäärän osoittajalla on esitys

$$\begin{aligned}
&f(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0)) = \\
&D_1 f(x(t_0), y(t_0))[x(t_0 + h) - x(t_0)] + D_2 f(x(t_0), y(t_0))[y(t_0 + h) - y(t_0)] \\
&\cdots + |\overline{h}|\varepsilon(\overline{h}),
\end{aligned}$$

missä $\overline{h} = (x(t_0 + h) - x(t_0), y(t_0 + h) - y(t_0))$ ja $\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0$. Jakamalla h:lla ja ottamalla raja-arvot, kun $h \to 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
F'(t_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0))}{h} \\
&= D_1 f(x(t_0), y(t_0)) x'(t_0) + D_2 f(x(t_0), y(t_0)) y'(t_0),
\end{aligned} \tag{11}$$

sillä Lauseen 2.1.9 nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{h}|}{h} \varepsilon(\overline{h}) &= \frac{\sqrt{(x(t_0 + h) - x(t_0))^2 + (y(t_0 + h) - y(t_0))^2}}{h} \varepsilon(\overline{h}) \\
&\to \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon(\overline{h}) = 0,
\end{aligned}$$

kun $h \to 0$.

Olkoon esimerkiksi

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$$

ja olkoon

$$f(x,y) = x^2y^3.$$

Lasketaan funktion

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

derivaatta pisteessä $t = \pi$. Nyt

$$x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t,$$

ja

$$D_1 f(x,y) = 2xy^3, \quad D_2 f(x,y) = 3x^2y^2,$$

joten yhtälön (11) nojalla

$$\begin{aligned} F'(\pi) &= D_1 f(\cos\pi, \sin\pi) \cdot (-\sin\pi) + D_2 f(\cos\pi, \sin\pi) \cdot (\cos\pi) \\ &= 2\cos\pi(\sin\pi)^3(-\sin\pi) + 3(\cos\pi)^2(\sin\pi)^2(\cos\pi) = 0. \end{aligned}$$

Samaan tulokseen päädytään muodostamalla yhdistetty funktio

$$F(t) = (\cos t)^2(\sin t)^3$$

ja derivoimalla sitä.

Sovitaan siitä, että pisteen $\overline{a} \in \mathbf{R}^m$ ympäristössä määriteltyä vektoriarvoista kuvausta $g : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}^n$ sanotaan differentioituvaksi pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^m$, jos sen koordinaattifunktiot g_j, $j = 1, \ldots, n$, ovat differentioituvia pisteessä $\overline{a}$. Tällöin merkitään

$$D_i g(\overline{a}) = (D_i g_1(\overline{a}), \ldots, D_i g_n(\overline{a})).$$

Lause 3.5.2 (*Ketjusääntö*) Olkoon $g : B(\overline{a}, r) \to \mathbf{R}^n$ pisteessä $\overline{a} \in \mathbf{R}^m$ differentioituva kuvaus ja olkoon f pisteessä $g(\overline{a}) \in \mathbf{R}^n$ differentioituva reaaliarvoinen funktio. Tällöin $f \circ g$ on differentioituva pisteessä $\overline{a}$ ja

$$D_i(f \circ g)(\overline{a}) = \nabla f(g(\overline{a})) \cdot D_i g(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(g(\overline{a})) D_i g_j(\overline{a}),$$

missä $i = 1, \ldots, m$.

Todistus. Todistuksen idea on seuraava: Jos $\overline{h} \in \mathbf{R}^m$ on "pieni lisäys", niin

$$(f\circ g)(\overline{a}+\overline{h}) - (f\circ g)(\overline{a}) = f(g(\overline{a}+\overline{h})) - f(g(\overline{a})) = f(g(\overline{a})+\overline{k}) - f(g(\overline{a})), \quad (12)$$

missä

$$\begin{aligned}\overline{k} &= g(\overline{a}+\overline{h})-g(\overline{a}) \\ &= (g_1(\overline{a}+\overline{h})-g_1(\overline{a}),\dots,g_n(\overline{a}+\overline{h})-g_n(\overline{a}))=(k_1,\dots,k_n).\end{aligned}$$

Koska funktiot g_j ovat differentioituvia, niin Lauseen 3.2.2 mukaan

$$k_j = g_j(\overline{a}+\overline{h})-g_j(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{m} D_i g_j(\overline{a})h_i + \left|\overline{h}\right| \varepsilon_j(\overline{h}), \tag{13}$$

missä $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \varepsilon_j(\overline{h}) = 0$ kaikilla $j=1,\dots,n$. Toisaalta f on differentioituva pisteessä $g(\overline{a})$, joten

$$f(g(\overline{a})+\overline{k})-f(g(\overline{a})) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(g(\overline{a}))k_j + \left|\overline{k}\right| \widetilde{\varepsilon}(\overline{k}), \tag{14}$$

missä $\lim_{\overline{k}\to\overline{0}} \widetilde{\varepsilon}(\overline{k}) = 0$. Yhdistämällä kaavat (12), (13) ja (14) saadaan

$$(f\circ g)(\overline{a}+\overline{h})-(f\circ g)(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} D_j f(g(\overline{a}))D_i g_j(\overline{a})\Big)h_i + |\overline{h}|\eta(\overline{h}).$$

Voidaan osoittaa (sivuutetaan), että $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \eta(\overline{h}) = 0$. Siis $f\circ g$ on differentioituva pisteessä $\overline{a}$ ja Lauseen 3.2.2 seurauksena

$$D_i(f\circ g)(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(g(\overline{a}))D_i g_j(\overline{a})$$

kaikilla $i=1,\dots,m$. $\square$

Esimerkki 3.5.3 (a) *Tapaus* $m=1$ ja $n=3$: Olkoon

$$f(\overline{x}) = f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2+x_3$$

ja olkoon g ”ruuvikäyrä”

$$g(t) = (\cos t, \sin t, t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)),$$

ks. Thomas: Calculus, s. 904. Nyt

$$\nabla f(\overline{x}) = (D_1f(\overline{x}), D_2f(\overline{x}), D_3f(\overline{x})) = (x_2, x_1, 1)$$

ja

$$Dg(t) = g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Yhdistetyn funktion $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}
D(f \circ g)(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot Dg(t) \\
&= \nabla f(\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) \\
&= (\sin t, \cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t.
\end{aligned}$$

Samaan tulokseen päädytään helpommin derivoimalla yhdistettyä funktiota

$$(f \circ g)(t) = \cos t \sin t + t.$$

(b) *Tapaus* $m = 2$ ja $n = 1$: Tällöin $f \circ g$ on kahden muuttujan funktio,

$$(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2))$$

ja ketjusääntö saa muodon

$$D_i(f \circ g)(\overline{x}) = f'(g(\overline{x})) \cdot D_i g(\overline{x})$$

missä $i = 1, 2$. Olkoon esimerkiksi

$$f(x) = e^{x^2} \quad \text{ja} \quad g(\overline{x}) = |\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Tällöin origon ulkopuolella yhdistetyn funktion osittaisderivaatoiksi saadaan

$$D_i(f \circ g)(\overline{x}) = f'(|\overline{x}|)\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_i) = 2|\overline{x}|e^{|\overline{x}|^2}\frac{x_i}{|\overline{x}|} = (2x_i)e^{|\overline{x}|^2}.$$

Samaan tulokseen päädytään laskemalla yhdistetyn funktion

$$(f \circ g)(\overline{x}) = f(|\overline{x}|) = e^{|\overline{x}|^2}$$

osittaisderivaatat tavanomaiseen tapaan.

(c) *Tapaus* $m = n = 2$: Olkoon

$$f(x, y) = \log{(x^2 + y^2)} \quad \text{ja} \quad g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Määrätään funktio $D_1(f \circ g)$. Nyt

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{ja} \quad D_1 g(x, y) = (2x, 2y),$$

joten

$$\begin{aligned}
D_1(f \circ g)(x, y) &= \nabla f(g(x, y)) \cdot D_1 g(x, y) \\
&= \nabla f(x^2 - y^2, 2xy) \cdot (2x, 2y) \\
&= \left(\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}, \frac{2(2xy)}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}\right) \cdot (2x, 2y) \\
&= \frac{4x(x^2 - y^2) + 8xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^3 + 4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(d) *Tapaus* $m = 2$ ja $n = 3$: Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ differentioituva ja olkoon $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ määritelty yhtälöllä

$$h(x,y) = f(x^2 - y^2, xy^2, 2y).$$

Määrätään osittaisderivaatta $D_1 h$ funktion f osittaisderivaattojen avulla. Funktio h voidaan esittää yhdistettynä funktiona $h = f \circ g$, missä

$$g(x,y) = (x^2 - y^2, xy^2, 2y).$$

Ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} D_1 h(x,y) &= \nabla f(g(x,y)) \cdot D_1 g(x,y) \\ &= D_1 f(g(x,y)) D_1 g_1(x,y) + D_2 f(g(x,y)) D_1 g_2(x,y) \\ &\quad \cdots + D_3 f(g(x,y)) D_1 g_3(x,y) \\ &= 2x D_1 f(g(x,y)) + y^2 D_2 f(g(x,y)). \end{aligned}$$

(e) Oletetaan, että differentioituva kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ toteuttaa Cauchy-Riemann-yhtälön

$$D_1 f_2(\overline{x}) = -D_2 f_1(\overline{x}) \tag{15}$$

kaikillla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Osoitetaan, että myös yhdistetty kuvaus $f \circ g$ toteuttaa yhtälön (15), kun

$$g(\overline{x}) = a\overline{x} + \overline{b},$$

missä $a \in \mathbf{R}$ ja $\overline{b} \in \mathbf{R}^2$. Nyt

$$D_1(f_2 \circ g)(\overline{x}) = \nabla f_2(g(\overline{x})) \cdot D_1 g(\overline{x}) = \nabla f_2(g(\overline{x})) \cdot (a, 0) = a D_1 f_2(g(\overline{x}))$$

ja

$$D_2(f_1 \circ g)(\overline{x}) = \nabla f_1(g(\overline{x})) \cdot D_2 g(\overline{x}) = \nabla f_1(g(\overline{x})) \cdot (0, a) = a D_2 f_1(g(\overline{x})),$$

joten

$$D_1(f_2 \circ g)(\overline{x}) = a D_1 f_2(g(\overline{x})) = -a D_2 f_1(g(\overline{x})) = -D_2(f_1 \circ g)(\overline{x})$$

kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Kyseessä on yksinkertaistettu esimerkki osittaisdifferentiaaliyhtälön *Möbiusinvarianssista*. Möbiusinvarianssi on tärkeä ilmiö kompleksianalyysissa ja yleensäkin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa.

4 Käyrät ja pinnat

4.1 Tasokäyrä ja tasokäyrän tangentti

Seuraavassa Δ tarkoittaa mielivaltaista väliä reaaliakselilla $\mathbf{R}$ ellei erikseen muuta mainita.

Määritelmä 4.1.1 Olkoon $f : \Delta \to \mathbf{R}^2$ jatkuva. Tällöin kuvaa $\Gamma := f(\Delta)$ sanotaan *(jatkuvaksi) käyräksi*. Yhtälöparia

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t), \quad t \in \Delta, \end{cases}$$

sanotaan käyrän Γ *parametriesitykseksi* ja t on *parametri.*

Esimerkki 4.1.2 (a) Olkoon $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2 + 3t, \\ f_2(t) &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Tällöin $\Gamma = f([0,1])$ on jana, jonka päätepisteet ovat $(2,1)$ ja $(5,3)$. Yleisesti, parametriesitys

$$\begin{aligned} x &= a_1 + (b_1 - a_1)t, \\ y &= a_2 + (b_2 - a_2)t, \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

antaa janan, jonka päätepisteet ovat $\overline{a} = (a_1, a_2)$ ja $\overline{b} = (b_1, b_2)$. Parametriesitys saadaan myös muotoon

$$(x, y) = (tb_1 + (1-t)a_1, tb_2 + (1-t)a_2) = t(b_1, b_2) + (1-t)(a_1, a_2),$$

missä $t \in [0,1]$.

(b) Olkoon käyrän Γ parametriesitys muotoa

$$\begin{aligned} x &= 10\cos t, \\ y &= 10\sin t, \end{aligned}$$

missä $t \in [0, 2\pi]$. Tällöin Γ on origokeskinen ympyrä, jonka säde on 10. Yleisesti, jos käyrän Γ parametriesitys on

$$\begin{aligned} x &= a_1 + R\cos t, \\ y &= a_2 + R\sin t, \end{aligned}$$

missä $R > 0$ ja $t \in [0, 2\pi]$, niin Γ on ympyrä, jonka keskipiste on $\overline{a} = (a_1, a_2)$ ja säde on R. Nimittäin

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2.$$

(c) Olkoon Γ käyrä, jonka parametriesitys on

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \end{aligned}$$

missä $t \in [0, \pi]$. Tällöin Γ on se osa yksikköympyrän kehää, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella. Käyrä Γ saadaan myös parametriesityksen

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= \sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

avulla. Siis käyrän *parametriesitys ei ole yksikäsitteinen.*

Tasokäyrän tangentin määrittelemiseksi sovitaan siitä, että vektorit $\overline{a} \neq \overline{0}$ ja $\overline{b} \neq \overline{0}$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos on olemassa reaaliluku $t \neq 0$ siten, että

$$\overline{a} = t\overline{b}.$$

Vektorit $\overline{a} \neq \overline{0}$ ja $\overline{b} \neq \overline{0}$ ovat *samansuuntaiset*, jos $t > 0$, ja *vastakkaissuuntaiset* jos $t < 0$.

Määritelmä 4.1.3 Olkoon $f : \Delta \to \mathbf{R}^2$ jatkuva ja olkoon L tason pisteen $f(t_0)$, $t_0 \in \Delta$, kautta kulkeva suora, jonka eräs suuntavektori on $\overline{\alpha}$. Tällöin suoraa L sanotaan käyrän Γ *tangentiksi pisteessä* $f(t_0)$, jos pisteiden $f(t_0)$ ja $f(t)$ kautta kulkevalla suoralla on suuntavektori $\overline{\beta}_t$ siten, että on olemassa raja-arvo $\lim_{t \to t_0} \overline{\beta}_t \neq \overline{0}$ joka on yhdensuuntainen vektorin $\overline{\alpha}$ kanssa.

Huomautus Määritelmässä 4.1.3 suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä eivätkä siis esimerkiksi yksikkövektoreita yleensä.

Lause 4.1.4 Olkoon $\Delta \subset \mathbf{R}$ avoin väli, $t_0 \in \Delta$, ja olkoon $f : \Delta \to \mathbf{R}^2$ pisteessä t_0 differentioituva kuvaus. Tällöin

$$\overline{\alpha} = (f_1'(t_0), f_2'(t_0))$$

on käyrän $\Gamma = f(\Delta)$ pisteeseen $f(t_0)$ liittyvän tangentin suuntavektori pisteessä $f(t_0)$, jos

$$f_1'(t_0)^2 + f_2'(t_0)^2 \neq 0.$$

Todistus. Pisteiden $f(t_0)$ ja $f(t)$ kautta kulkevalla suoralla on suuntavektori

$$\overline{\beta_t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Koska f_1 ja f_2 ovat derivoituvia pisteessä t_0, niin lisäoletuksen nojalla

$$\lim_{t \to t_0} \overline{\beta}_t = (f_1'(t_0), f_2'(t_0)) \neq \overline{0}.$$

□

Esimerkki (a) Ellipsin

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos t, \\ y(t) &= 5\sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

pisteeseen $(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$ (jota vastaa parametrin arvo $t = \frac{\pi}{4}$) piirretyn tangentin suuntavektori on $(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$, sillä $x'(t) = -2\sin t$ ja $y'(t) = 5\cos t$. Näin ollen tangentin parametriesitys on

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{2}{\sqrt{2}} - \tfrac{2}{\sqrt{2}}t, \\ y(t) &= \tfrac{5}{\sqrt{2}} + \tfrac{5}{\sqrt{2}}t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Huomaa, että pisteen $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ kautta kulkevan suoran, jonka suuntavektori on $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}^2$, parametriesitys on yleisesti muotoa

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 + \alpha_1 t, \\ y(t) &= a_2 + \alpha_2 t, \end{aligned}$$

missä $t \in \mathbf{R}$.

(b) *Sykloidille*

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t, \\ y(t) &= 1 - \cos t, \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

saadaan derivaatoiksi

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t,$$

joten

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 0$$

kun $t = 0$. Pisteessä $t = 0$ sykloidilla ei ole tangenttia vaikka parametriesitys on jatkuvasti derivoituva.

Huomautus 4.1.5 Olkoon $f : \Delta \to \mathbf{R}^3$ jatkuva. Tällöin kuvaa $\Gamma := f(\Delta)$ sanotaan *(jatkuvaksi) käyräksi* avaruudessa $\mathbf{R}^3$. Yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \quad t \in \Delta, \end{cases}$$

sanotaan käyrän Γ *parametriesitykseksi*. Jos

$$f_1'(t_0)^2 + f_2'(t_0)^2 + f_3'(t_0) \neq 0,$$

niin avaruuskäyrän $\Gamma = f(\Delta)$ pisteeseen $f(t_0)$ liittyvän tangentin suuntavektori pisteessä $f(t_0)$ on muotoa

$$\overline{\alpha} = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), f_3'(t_0)).$$

Tämä nähdään aivan kuten edellä tasokäyrille. Avaruuskäyrillä ja käyrän tangentilla on seuraava fysikaalinen tulkinta: Käyrä $\Gamma = f(\Delta)$,

$$\begin{cases} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \quad t \in \Delta, \end{cases}$$

antaa kappaleen paikan avaruudessa $\mathbf{R}^3$ ajan t funktiona ja derivaattavektori $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ antaa liikkeen suunnan ajanhetkellä $t = t_0$. Edelleen derivaattavektorin normi $\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 + z'(t_0)^2}$ antaa liikkeen nopeuden ajanhetkellä $t = t_0$. Mekaniikassa parametriesitykselle käytetään usein merkintää $\overline{r}(t)$.

Tasa-arvokäyrä

Olkoon $g : U \to \mathbf{R}$ jatkuva, missä $U \subset \mathbf{R}^2$ on avoin. Jos $c \in \mathbf{R}$, niin alkukuvajoukkoa

$$g^{-1}(c) = \{ (x, y) \in U \mid g(x, y) = c \}$$

sanotaan g:n *tasa-arvokäyräksi* edellyttäen, että kyseinen joukko on epätyhjä.

Esimerkki (a) Ellipsi $x^2 + 2y^2 = 3$ on funktion $g(x, y) = x^2 + 2y^2$ tasa-arvokäyrä.

(b) Olkoon $\Delta \subset \mathbf{R}$ avoin ja olkoon $f : \Delta \to \mathbf{R}$ jatkuva. Asetetaan

$$g(x, y) = f(x) - y$$

kaikilla $x \in \Delta$, $y \in \mathbf{R}$. Tällöin $g(x, y) = 0$ jos ja vain jos $y = f(x)$. Siis reaalifunktion kuvaaja on esimerkki tasa-arvokäyrästä.

Lause 4.1.6 Tasa-arvokäyrän

$$g^{-1}(c) = \{\, (x,y) \in U \mid g(x,y) = c \,\}$$

pisteeseen $\overline{a} \in g^{-1}(c)$ piirretty tangentti on kohtisuorassa gradienttivektoriin $\nabla g(\overline{a})$ nähden jos tasa-arvokäyrällä on pisteen $\overline{a}$ ympäristössä parametriesitys

$$\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \quad t \in \Delta, \end{aligned}$$

missä $\Delta \subset \mathbf{R}$ on avoin, $\overline{a} = f(t_0)$ jollakin $t_0 \in \Delta$, ja funktiot $f_1(t)$, $f_2(t)$ ovat välillä Δ derivoituvia siten, että

$$f_1'(t_0)^2 + f_2'(t_0)^2 \neq 0.$$

Todistus. Lauseen 4.1.4 mukaan tasa-arvokäyrällä on pisteessä $\overline{a} = f(t_0)$ vektorin $(f_1'(t_0), f_2'(t_0))$ suuntainen tangentti. Koska

$$(g \circ f)(t) = c$$

kaikilla $t \in \Delta$, niin $(g \circ f)'(t) = 0$ kaikilla $t \in \Delta$ ja ketjusäännön nojalla pisteessä $t = t_0$ pätee

$$(g \circ f)'(t) = \nabla g(f(t_0)) \cdot f'(t_0) = (D_1 g(f(t_0)), D_2 g(f(t_0))) \cdot (f_1'(t_0), f_2'(t_0)) = 0.$$

Siis pisteeseen $\overline{a} = f(t_0)$ liittyvä tangenttivektori on kohtisuorassa gradienttivektorin $\nabla g(f(t_0))$ kanssa. $\square$

Huomautus 4.1.7 (a) Käytännössä Lausetta 4.1.6 voi huoletta soveltaa, jos tasa-arvokäyrällä ei ole teräviä kulmia, ts. tangentti on aina olemassa.

(b) Lauseen 4.1.6 maanläheinen tulkinta sanoo: Joet virtaavat likimäärin kohtisuoraan korkeuskäyriin nähden, ks. Thomas: Calculus, s. 911.

Esimerkki Mikä on hyperbelin $x^2 - y^2 = 1$ pisteen $(2, \sqrt{3})$ kautta kulkevan tangentin yhtälö? Koska hyperbeli on funktion

$$g(x,y) = x^2 - y^2$$

tasa-arvokäyrä, niin g:n gradientti pisteessä $(2, \sqrt{3})$ antaa tangentin normaalin suunnan. Nyt

$$\nabla g(x,y) = (2x, -2y) \quad \text{eli} \quad \nabla g(2, \sqrt{3}) = (4, -2\sqrt{3}).$$

Siis normaalin kulmakerroin on $-\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ eli tangentin kulmakerroin on $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (tunnetusti tangentin ja normaalin kulmakertoimien tulo on -1). Näin ollen tangentin yhtälö on

$$y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) \quad \text{eli} \quad 2x - (\sqrt{3})y - 1 = 0.$$

4.2 Tasa-arvopinnat ja tangenttitaso

Tarkastellaan *tasa-arvopintoja*, so. joukkoja S, jotka voidaan esittää muodossa

$$S := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\},$$

missä $f : U \to \mathbf{R}$ jatkuva avoimessa joukossa $U \subset \mathbf{R}^3$.

Esimerkki Ellipsoidi

$$f(x, y, z) := \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} - 1 = 0$$

on tasa-arvopinta. Havainnollisen kuvan ellipsoidista saa ajattelemalla ”puikulaperunaa”.

Esimerkki 4.2.1 Jos $g : U \to \mathbf{R}$ on jatkuva, missä $U \subset \mathbf{R}^2$ on avoin, niin yhtälö

$$g(x, y) = z$$

määrittelee tasa-arvopinnan. Tämä todetaan asettamalla

$$f(x, y, z) := g(x, y) - z.$$

Tällöin $f(x, y, z) = 0$ jos ja vain jos $z = g(x, y)$. On myöskin selvää, että f on jatkuva avoimessa joukossa $\{\,(x, y, z) \mid (x, y) \in U,\ z \in \mathbf{R}\,\}$. Kyseistä tasa-arvopintaa sanotaan *funktion g kuvaajaksi*.

Tangenttitaso

Tarkastellaan tasa-arvopintaa

$$S = \{f(x, y, z) = 0\}.$$

Olkoon $(x_0, y_0, z_0) \in S$, jolloin siis $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Tällöin samantapaisella idealla kuin edellä tasa-arvokäyrän tangentin tapauksessa voidaan ketjusäännön avulla osoittaa, että pisteeseen $(x_0, y_0, z_0) \in S$ liittyvän pinnan S tangenttitason T yhtälö saadaan ehdosta

$$D_1 f(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + D_3 f(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

missä $(x, y, z) \in T$ on mielivaltainen. Siis $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ on kohtisuorassa vektoriin $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ nähden.

Esimerkki Tarkastellaan tasa-arvopintaa

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{x^2}{3^2} - 1 = 0.$$

Muodostetaan tangenttitason yhtälö pisteessä $(2, 1, \frac{3}{\sqrt{2}})$. Osittaisderivaatoiksi saadaan

$$\begin{aligned} (\nabla f)(x, y, z) &= \left(\tfrac{x}{8}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{2z}{9}\right) \\ (\nabla f)(2, 1, \tfrac{3}{\sqrt{2}}) &= \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{3}\right), \end{aligned}$$

joten tangenttitason yhtälö on

$$\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

eli

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}z - 2 = 0.$$

Huomautus 4.2.2 Palautetaan mieleen suoran ja tason yhtälöt avaruudessa $\mathbf{R}^3$.

Suoran yhtälö avaruudessa $\mathbf{R}^3$: Pisteen $\overline{a} \in \mathbf{R}^3$ kautta kulkevan vektorin $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}^3$ suuntaisen suoran L yhtälö on

$$\overline{x} = \overline{a} + t\overline{\alpha}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Siis $\overline{x} \in L$ jos ja vain jos on olemassa t siten, että $\overline{x} = \overline{a} + t\overline{\alpha}$.

Tason T yhtälö avaruudessa $\mathbf{R}^3$: Taso T on määrätty, jos tunnetaan:

- piste $\overline{a} \in T$,
- tason T normaalivektori $\overline{n}$, joka on kohtisuorassa jokaista tasossa T kulkevaa suoraa vastaan.

Tällöin tason T mielivaltainen piste $\overline{x}$ toteuttaa yhtälön

$$(\overline{x} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$$

eli

$$x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 - a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3 = 0.$$

Yleisesti siis tason yhtälö on muotoa

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0,$$

missä $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ ovat vakioita.

5 Väliarvolause ja implisiittifunktiolause

5.1 Väliarvolause

Reaalifunktioiden väliarvolause sanoo, että jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin jossakin pisteessä $\xi \in]a, b[$ pätee

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Tämä tärkeä tulos saadaan yleistettyä ketjusäännön avulla useamman muuttujan funktioille.

Lause 5.1.1 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja olkoon $f : U \to \mathbf{R}$ differentioituva. Oletetaan, että pisteiden $\overline{a}, \overline{b} \in U$ välinen yhdysjana J sisältyy joukkoon U. Tällöin on olemassa $\overline{c} \in J$, jolle

$$f(\overline{a}) - f(\overline{b}) = \nabla f(\overline{c}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}). \tag{16}$$

Todistus. Pisteiden $\overline{a}, \overline{b} \in U$ välinen yhdysjana on muotoa

$$J = \{\, t\overline{a} + (1 - t)\overline{b} \mid 0 \leq t \leq 1 \,\}.$$

Määritellään funktio $h : [0, 1] \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$h(t) = f(t\overline{a} + (1 - t)\overline{b}) = (f \circ g)(t),$$

missä

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (ta_1 + (1 - t)b_1, ta_2 + (1 - t)b_2).$$

Ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot (g_1'(t), g_2'(t)) = \nabla f(g(t)) \cdot (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \\ &= \nabla f(g(t))) \cdot (\overline{a} - \overline{b}). \end{aligned}$$

Reaalifunktioiden väliarvolauseen mukaan on olemassa $\xi \in]0, 1[$, jolle

$$h(1) - h(0) = h'(\xi)(1 - 0) = h'(\xi).$$

Siis

$$f(\overline{a}) - f(\overline{b}) = \nabla f(g(\xi)) \cdot (\overline{a} - \overline{b}).$$

Väite seuraa merkitsemällä $\overline{c} = g(\xi)$. $\square$

Huomautus Vastaava väite voidaan todistaa samalla tavalla n:n muuttujan funktiolle f.

Esimerkki 5.1.2 Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differentioituva siten, että

$$|\nabla f(\overline{x})| = 0$$

kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Tällöin f on vakiofunktio. Nimittäin väliarvolauseen mukaan kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$ pätee

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{0})| = |\nabla f(\overline{y})||\overline{x} - \overline{0}| = 0.$$

Siis $f(\overline{x}) = f(\overline{0})$ kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$. Tulos pätee yleisesti alueille tasossa, mutta yleinen todistus vaatii topologian alkeita ja sivuutetaan.

Esimerkki 5.1.3 Jos $|\,\nabla f(\overline{x})\,| \leq M$ kaikilla $\overline{x} \in U$ jollekin $M > 0$ (ts. gradientti on rajoitettu), niin väliarvolauseen ja Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} \left| f(\overline{b}) - f(\overline{a}) \right| &= \left| \nabla f(\overline{c}) \cdot (\overline{b} - \overline{a}) \right| \\ &\leq |\,\nabla f(\overline{c})\,| \left| \overline{b} - \overline{a} \right| \\ &\leq M \left| \overline{b} - \overline{a} \right| \end{aligned}$$

aina kun pisteiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ yhdysjana J sisältyy joukkoon U. Epäyhtälöä sanotaan *Lipschitz-ehdoksi*.

5.2 Implisiittifunktiolause

Aiemmin todettiin, että reaalifunktion kuvaaja on esimerkki tasa-arvokäyrästä. Implisiittifunktiolause kertoo sen milloin käänteinen pätee lokaalisti, so. milloin tasa-arvokäyrä on lokaalisti reaalifunktion kuvaaja. Tarkastellaan ideaa ensin ympyrän tapauksessa:

Esimerkki Missä yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ pisteissä (x, y) ympyrän kaari on lokaalisti yhden muuttujan funktion kuvaaja? Esimerkiksi pisteen $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ riittävän pienessä palloympäristössä ympyrän kaari yhtyy funktion $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ kuvaajaan. Sen sijaan pisteen $(1, 0)$ missään ympäristössä ympyrän kaari ei voi olla yhden muuttujan funktion $g(x)$ kuvaaja, koska tällöin aina annettuun arvoon x liittyy kaksi y:n arvoa ympyrällä. Jälkimmäisessä tapauksessa tangentti on pystysuora.

Lause 5.2.1 Olkoon $f \in \mathbf{C}^1(U)$, missä $U \subset \mathbf{R}^2$ on avoin. Olkoon $(a, b) \in U$ siten, että $f(a, b) = 0$ ja $D_2 f(a, b) \neq 0$. Tällöin on olemassa avoin suorakulmio

$$D = \{\, (x, y) \mid a_1 < x < a_2,\, b_1 < y < b_2 \,\} \subset \mathbf{R}^2$$

siten, että $(a, b) \in D$ ja jokaista $x \in]a_1, a_2[$ kohti yhtälöllä

$$f(x, y) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x) \in]b_1, b_2[$. Funktio $x \mapsto y(x)$ on jatkuvasti derivoituva välillä $]a_1, a_2[$ ja

$$y'(a) = -\frac{D_1 f(a, b)}{D_2 f(a, b)}.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. esimerkiksi Lehto: Differentiaali- ja integraalilaskenta II. $\square$

Huomautus Funktio $x \mapsto y(x)$ toteuttaa ehdon

$$f(x, y(x)) = 0$$

kaikilla $x \in]a_1, a_2[$. Siis tasa-arvokäyrä $f(x, y) = 0$ yhtyy suorakulmiossa D funktion $x \mapsto y(x)$ kuvaajaan.

Esimerkki Tarkastellaan tasa-arvokäyrää

$$f(x, y) = y^5 + xy - 4 = 0.$$

Piste $(3, 1)$ sijaitsee käyrällä, sillä $1^5 + 3 \cdot 1^4 - 4 = 0$. Nyt

$$D_2 f(x, y) = 5y^4 + x \quad \text{eli} \quad D_2 f(3, 1) = 8 \neq 0.$$

Lauseen 5.2.1 mukaan pisteen $(3, 1)$ eräässä ympäristössä käyrä $f(x, y) = 0$ yhtyy erään derivoituvan funktion $x \mapsto y(x)$ kuvaajaan. Derivaatta $y'(3)$ saadaan ns. *implisiittisellä derivoinnilla.* Derivoidaan yhtälö

$$y(x)^5 + xy(x) - 4 = 0$$

puolittain x:n suhteen, jolloin

$$5y(x)^4 y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0.$$

Sijoittamalla $x = 3$, $y(3) = 1$, saadaan

$$5y'(3) + 1 + 3y'(3) = 0,$$

joten $y'(3) = -\frac{1}{8}$. Myös piste $(-5, -1)$ sijaitsee käyrällä $f(x, y) = 0$. Kuitenkin $D_2 f(-5, -1) = 0$, joten Lausetta 5.2.1 ei voi soveltaa.

Huomautus 5.2.2 (a) Implisiittifunktion $x \mapsto y(x)$ derivaattaa $y'(a)$ koskeva kaava saadaan helposti ketjusäännön avulla. Olkoon $f : U \to \mathbf{R}$ differentioituva, $f(a,b) = 0$ ja $D_2 f(a,b) \neq 0$. Implisiittifunktiolauseen mukaan yhtälöllä $f(x,y) = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu $y(x)$ kaikilla $x \in \,]a_1, a_2[$ ja funktio $x \mapsto y(x)$ on jatkuvasti derivoituva. Yhtälö $f(x, y(x)) = 0$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$F(x) := (f \circ g)(x) = 0,$$

missä $g(x) = (x, y(x))$. Ketjusäännön mukaan

$$0 = F'(x) = D_1 f(x, y(x)) \cdot 1 + (D_2 f)(x, y(x)) \cdot y'(x),$$

joten sijoittamalla $x = a$, $y(a) = b$, saadaan

$$y'(a) = \frac{-D_1 f(a,b)}{D_2 f(a,b)}.$$

(b) On ilmeistä, että x:n ja y:n roolit voidaan vaihtaa implisiittifunktiolauseessa: Jos $f : U \to \mathbf{R}$ differentioituva, $f(a,b) = 0$ ja $D_1 f(a,b) \neq 0$, niin pisteen (a,b) eräässä ympäristössä tasa-arvokäyrä $f(x,y) = 0$ yhtyy funktion $y \mapsto x(y)$ kuvaajaan. Derivaatta $x'(b)$ saadaan johdettua ketjusäännön avulla kuten kohdassa (a). Tälläinen tilanne esiintyy esimerkiksi käyrän $y^5 + xy - 4 = 0$ pisteessä $(-5, 1)$.

(c) Implisiittifunktiolause voidaan yleistää n:n muuttujan funktioille, mutta tämän tarkastelu sivuutetaan.

6 Ääriarvojen teoriaa

6.1 Lokaalit ääriarvot

Määritelmä 6.1.1 Olkoon $f : U \to \mathbf{R}$, missä $U \subset \mathbf{R}^n$ on avoin ja $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

(a) funktiolla f on *(lokaali) maksimi* pisteessä $\overline{a} \in U$, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $f(\overline{x}) \leq f(\overline{a})$ kaikilla $\overline{x} \in B(\overline{a}, r)$,

(b) funktiolla f on *(lokaali) minimi* pisteessä $\overline{a} \in U$, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $f(\overline{x}) \geq f(\overline{a})$ kaikilla $\overline{x} \in B(\overline{a}, r)$.

Nimityksiä*(Lokaali) ääriarvo* on yhteisnimitys lokaalille minimille ja lokaalille maksimille. *Ääriarvopiste* on määrittelyjoukon piste, jossa ääriarvo saavutetaan. Ääriarvo on *oleellinen*, jos $f(\overline{x}) \neq f(\overline{a})$ kaikilla $\overline{x} \in B(\overline{a}, r) \setminus \{\overline{a}\}$ Määritelmässä 6.1.1.

Lause 6.1.2 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin ja $f : U \to \mathbf{R}$ derivoituva. Jos funktiolla f on pisteessä $\overline{a} \in U$ lokaali ääriarvo, niin

$$|\nabla f(\overline{a})| = 0.$$

Todistus. Olkoon esimerkiksi funktiolla f pisteessä $\overline{a}$ lokaali maksimi. On osoitettava, että $D_i f(\overline{a}) = 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tätä varten, tarkastellaan funktiota

$$g_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

missä $i = 1, \dots, n$. Määritelmästä 6.1.1 seuraa, että funktiolla g_i on pisteessä a_i lokaali maksimi. Siis $g_i'(a_i) = 0$. Toisaalta derivaatan ja osittaisderivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} D_i f(\overline{a}) &= \lim_{h \to 0} \tfrac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\overline{a})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \tfrac{g_i(a_i + h) - g_i(a_i)}{h} = g_i'(a_i) = 0. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 6.1.3 Se, että gradienttivektori on nollavektori jossain pisteessä, *ei* välttämättä takaa ääriarvon olemassaoloa kyseisessä pisteessä. Olkoon

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Nyt $D_1 f(0,0) = 0 = D_2 f(0,0)$, mutta origo ei ole ääriarvopiste, sillä

$$\begin{aligned} f(0, r) &= -r^2 < 0, \\ f(r, 0) &= r^2 > 0, \end{aligned}$$

kaikilla $r \in \mathbf{R}$.

Hessen matriisi

Seuraavaksi annetaan tulos, joka antaa riittävän ehdon ääriarvojen olemassaololle. Ehto liittyy toisen kertaluvun osittaisderivaattamatriisin (Hessen matriisi) ominaisarvoihin. Tätä varten määritellään ensin mitä ominaisarvoilla tarkoitetaan.

Olkoon A symmetrinen $n \times n$-reaalilukumatriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}. \end{pmatrix}$$

Matriisin A symmetrisyys tarkoittaa sitä, että $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$. Pidetään tunnettuna, että matriisin A symmetrisyyden seurauksena *karakteristisen yhtälön*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ratkaisut λ ovat kaikki reaalisia. Ratkaisuja λ sanotaan matriisin A *ominaisarvoiksi*. Koska karakteristinen yhtälö on korkeintaan astetta n oleva polynomi λ:n suhteen, eri suuria ominaisarvoja on korkeintaan n kappaletta.

Esimerkki Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & -3 \\ 2 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

ja karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)(5-\lambda)^2 + 12 + 12 - 4(5-\lambda) - 9(1-\lambda) - 4(5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 11\lambda + 18) = 0. \end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön ratkaisut (matriisin A ominaisarvot) ovat $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = 9$.

Määritelmä 6.1.4 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in \mathbf{C}^2(U)$. Matriisia

$$H_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\overline{a}) & D_{12}f(\overline{a}) & \ldots & D_{1n}f(\overline{a}) \\ D_{21}f(\overline{a}) & D_{22}f(\overline{a}) & \ldots & D_{2n}f(\overline{a}) \\ \vdots & & \ddots & \\ D_{n1}f(\overline{a}) & D_{n2}f(\overline{a}) & \ldots & D_{nn}f(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

kutsutaan funktion f *Hessen matriisiksi pisteessä* $\overline{a} \in U$.

Huomautus Huomaa, että $D_{ij}f(\overline{a}) = D_{ji}f(\overline{a})$ oletuksen $f \in \mathbf{C}^2(U)$ seurauksena (ks. Huomautus 3.3.4 (b)). Siis Hessen matriisi on joka pisteessä symmetrinen aina kun $f \in \mathbf{C}^2(U)$.

Lause 6.1.5 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in \mathbf{C}^2(U)$. Oletetaan, että

$$|\nabla f(\overline{a})| = 0$$

jollekin $\overline{a} \in U$. Tällöin

(a) funktiolla f on pisteessä $\overline{a}$ lokaali minimi, jos kaikki Hessen matriisin $H_f(\overline{a})$ ominaisarvot ovat positiivisia, ts. $\lambda_i > 0$,

(b) funktiolla f on pisteessä $\overline{a}$ lokaali maksimi, jos kaikki Hessen matriisin $H_f(\overline{a})$ ominaisarvot ovat negatiivisia, ts. $\lambda_i < 0$,

(c) funktiolla f ei ole pisteessä $\overline{a}$ ääriarvoa, jos Hessen matriisilla $H_f(\overline{a})$ on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja.

Todistus. Lauseen todistus sivuutetaan, ks. esim. Eriksson: Flerdimensionell analys, s. 141. □

Tasossa $\mathbf{R}^2$ tulos saa muodon:

Seuraus 6.1.6 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja olkoon $f \in \mathbf{C}^2(U)$. Oletetaan, että

$$|\nabla f(\overline{a})| = 0$$

jollekin $\overline{a} \in U$. Jos determinantille pätee

$$\mathcal{D} := D_{11}f(\overline{a})D_{22}f(\overline{a}) - D_{12}(\overline{a})^2 > 0, \tag{17}$$

niin $\overline{a}$ on oleellinen ääriarvopiste ja kyseessä on

(a) lokaali maksimi, jos $D_{11}f(\overline{a}) < 0$,

(b) lokaali minimi, jos $D_{11}f(\overline{a}) > 0$.

Jos $\mathcal{D} < 0$, funktiolla f ei ole ääriarvoa pisteessä $\overline{a}$.

Todistus. Nyt ominaisarvoille λ_1 ja λ_2 pätee (harjoitustehtävä)

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= D_{11}f(\overline{a})D_{22}f(\overline{a}) - D_{12}f(\overline{a})^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= D_{11}f(\overline{a}) + D_{22}f(\overline{a}). \end{aligned}$$

Jos

$$D_{11}f(\overline{a})D_{22}f(\overline{a}) - D_{12}f(\overline{a})^2 < 0,$$

niin ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat erimerkkiset, joten Lauseen 6.1.5 mukaan funktiolla f ei ole pisteessä $\overline{a}$ ääriarvoa. Jos taas

$$D_{11}f(\overline{a})D_{22}f(\overline{a}) - D_{12}f(\overline{a})^2 > 0,$$

niin λ_1, λ_2, $D_{11}f(\overline{a})$ ja $D_{22}f(\overline{a})$ ovat samanmerkkiset. Siis, jos $D_{11}f(\overline{a}) > 0$, niin $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 > 0$ eli f:llä on pisteessä $\overline{a}$ lokaali minimi (Lause 6.1.5).

Vastaavasti, jos $D_{11}f(\overline{a}) < 0$, niin $\lambda_1 < 0$ ja $\lambda_2 < 0$ eli f:llä on pisteessä $\overline{a}$ lokaali maksimi. $\square$

Esimerkki Olkoon

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

eli f antaa pisteen (x,y) normin neliön. On selvää, että f:llä on origossa lokaali minimi. Nyt $D_1f(x,y) = 2x$, $D_2f(x,y) = 2y$, $D_{11}f(x,y) = 2$, $D_{22}f(x,y) = 2$, $D_{12}f(x,y) = 0$, joten

$$\mathcal{D}(\overline{0}) = D_{11}f(\overline{0})D_{22}f(\overline{0}) - D_{12}f(\overline{0})^2 = 4 > 0$$

ja $D_{11}f(\overline{0}) = 2 > 0$.

Nimitys Olkoot U, f ja $\overline{a}$ kuten Lauseessa 6.1.5. Jos

$$|\nabla f(\overline{a})| = 0,$$

mutta f saa jokaisessa ympäristössä $B(\overline{a}, r) \subset U$ sekä suurempia että pienempiä arvoja kuin $f(\overline{a})$, niin $\overline{a}$ on funktion f *satulapiste*.

Esimerkki 6.1.7 (a) Tutkitaan funktion

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

ääriarvoja. Mahdolliset ääriarvopisteet löytyvät pisteistä, joissa gradientti on nollavektori. Mutta $|\nabla f(x,y)| = 0$ jos ja vain jos $(2x, -2y) = (0,0)$ eli vain tapauksessa $(x,y) = (0,0)$. Siis origo on ainoa mahdollinen ääriarvopiste. Mutta

$$\mathcal{D}(\overline{0}) = D_{11}f(\overline{0})D_{22}f(\overline{0}) - D_{12}f(\overline{0})^2 = -4 < 0,$$

joten origossa ei ole ääriarvoa (origo on satulapiste).

(b) Tutkitaan funktion

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y$$

ääriarvoja. Nyt osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) &= 2x + y + 1 \\ D_2f(x,y) &= x + 2y - 1. \end{aligned}$$

Jos (x,y) on kriittinen piste (eli gradientin nollakohta), niin

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $(x, y) = (-1, 1)$. Laskemalla toisen kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $(-1, 1)$ saadaan

$$\mathcal{D}(-1,1) = D_{11}f(-1,1)D_{22}f(-1,1) - D_{12}f(-1,1)^2 = 2^2 - 1 = 3 > 0.$$

Koska $D_{11}f(-1, 1) = 2 > 0$, funktiolla f on pisteessä $(-1, 1)$ lokaali minimi.

(c) Tutkitaan funktion

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$$

ääriarvoja. Ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) &= 3x^2 + 3y, \\ D_2f(x,y) &= -3y^2 + 3x. \end{aligned}$$

Kriittiset pisteet löytyvät yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x^4 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

ratkaisuista. Ratkaisuiksi saadaan $(x, y) = (0, 0)$ tai $(x, y) = (1, -1)$. Edelleen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0,0) &= -9 < 0 \quad \text{(satulapiste)} \\ \mathcal{D}(-1,1) &= 6 \cdot 6 - 9 = 36 - 9 > 0 \quad \text{(minimipiste)} \end{aligned}$$

(d) Tutkitaan funktion

$$f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$$

ääriarvoa origossa. Laskemalla osittaisderivaatat todetaan, että $|\nabla f(\overline{0})| = 0$ ja $\mathcal{D}(\overline{0}) = 0$. Siis Seuraus 6.1.6 ei sano mitään tilanteesta. Tarkastelemalla funktiota f x-akselilla todetaan, että

$$f(x, 0) = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) > 0 \quad \text{kun } 0 < |x| < 1.$$

Toisaalta suoralla $y = x$ pätee

$$f(x, x) = -2x^4 < 0 \quad \text{kun } x \neq 0.$$

Näin ollen f saa jokaisessa origon ympäristössä arvoa $f(\overline{0})$ suurempia ja pienempiä arvoja eli funktiolla f ei ole origossa ääriarvoa.

6.2 Sidotut ääriarvot

Sidotulla ääriarvotehtävällä tarkoitetaan tässä ongelmaa: Kuinka löydetään rajoittumafunktion $f|B$ ääriarvot, kun B on tasa-arvokäyrä

$$B := \{\, (x, y) \in U \mid g(x, y) = 0 \,\}$$

ja funktiot f ja g ovat jatkuvasti derivoituvia avoimessa joukossa $U \subset \mathbf{R}^2$?

Sidottu ääriarvotehtävä voidaan suotuisassa tapauksessa muuntaa yhden muuttujan funktion ääriarvo-ongelmaksi:

Esimerkki 6.2.1 (a) Olkoot

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + y \quad \text{ja} \quad g(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

Määrätään funktion $f|B$ ääriarvot hyperbelillä

$$B = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \,\}.$$

Joukossa B pätee

$$f(x, y) = (y^2 + 1) - 2y^2 + y = 1 - y^2 + y =: h(y),$$

missä $y \in \mathbf{R}$. Siis ongelma palautuu yhden muuttujan funktion h ääriarvojen määräämiseen. Koska

$$h'(y) = 1 - 2y = 0 \quad \text{jos ja vain jos} \quad y = \frac{1}{2}$$

ja derivaatta vaihtaa merkkinsä $+ \to -$, funktiolla h on pisteessä $y = \frac{1}{2}$ lokaali maksimi $h(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$. Siis funktiolla f on pisteissä $(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ lokaali maksimiarvo $\frac{5}{4}$.

(b) Yleisesti, jos yhtälöstä $g(x, y) = 0$ voidaan ratkaista y muuttujan x funktiona (tai x muuttujan y funktiona), niin sidottu ääriarvo-ongelma muuttuu yhden muuttujan funktion ääriarvo-ongelmaksi.

Yleisessä tilanteessa voidaan johtaa seuraava välttämätön ehto ääriarvon olemassaololle.

Lause 6.2.2 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja oletetaan, että

(a) $f, g \in \mathbf{C}^1(U)$,

(b) funktiolla f on ääriarvo joukossa $B = \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\}$ pisteessä $(a,b) \in B$,

(c) $|\nabla g(a,b)| \neq 0$.

Tällöin

$$\begin{vmatrix} D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \\ D_1 g(a,b) & D_2 g(a,b) \end{vmatrix} = 0.$$

Todistus. Olkoon esimerkiksi $D_2 g(a,b) \neq 0$. Tällöin implisiittifunktiolauseen mukaan yhtälö $g(x,y) = 0$ määrittelee eräällä avoimella välillä $]a_1, a_2[$, jolle $a \in]a_1, a_2[$, muuttujan y muuttujan x jatkuvasti derivoituvana funktiona. Ketjusäännön nojalla funktio $h :]a_1, a_2[\to \mathbf{R}$,

$$h(x) = f(x, y(x)),$$

on derivoituva välillä $]a_1, a_2[$. Oletuksen mukaan funkiolla f on ääriarvo joukossa B pisteessä (a,b), joten funktiolla h on ääriarvo pisteessä a. Siis $h'(a) = 0$. Mutta ketjusäännön mukaan

$$h'(a) = D_1 f(a, y(a)) + D_2 f(a, y(a)) y'(a)$$

ja implisiittifunktiolauseen mukaan

$$y'(a) = -\frac{D_1 g(a,b)}{D_2 g(a,b)},$$

joten

$$h'(a) = D_1 f(a, y(a)) - D_2 f(a, y(a)) \frac{D_1 g(a,b)}{D_2 g(a,b)} = 0.$$

Sijoittamalla $y(a) = b$ todetaan

$$D_1 f(a,b) D_2 g(a,b) - D_2 f(a,b) D_1 g(a,b) = 0.$$

Samaan ehtoon päädytään oletuksesta $D_1 g(a,b) \neq 0$ vaihtamalla x:n ja y:n roolit implisiittifunktiolauseessa (sivuutetaan). □

Esimerkki 6.2.3 Määrätään funktion

$$f(x,y) = 3x + 4y - 3$$

mahdolliset ääriarvopisteet joukossa

$$(x-1)^2 + y^2 = 25.$$

Nyt $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 25$, joten

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 3, \\ D_2 f(x,y) &= 4, \\ D_1 g(x,y) &= 2(x-1), \\ D_2 g(x,y) &= 2y. \end{aligned}$$

Lausetta 6.2.2 ei voi käyttää pisteissä, joissa funktion g gradientti häviää. Koska $|\nabla g(x,y)| = 0$ jos ja vain jos $(x,y) = (0,0)$, funktion g gradientti ei häviä ympyrällä $g(x,y) = 0$. Riittää siis tutkia, milloin Lauseen 6.2.2 determinanttiehto pätee ympyrällä $g(x,y) = 0$. Koska

$$\begin{vmatrix} D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \\ D_1 g(a,b) & D_2 g(a,b) \end{vmatrix} = 6y - 8(x-1) = 0$$

jos ja vain jos $y = \frac{4}{3}(x-1)$, mahdolliset ääriarvopisteet löytyvät suoran $y = \frac{4}{3}(x-1)$ ja ympyrän $(x-1)^2 + y^2 = 25$ leikkauspisteistä. Sijoittamalla suoran yhtälö ympyrän yhtälöön saadaan mahdollisiksi ääriarvopisteiksi $(x,y) = (4,4)$ tai $(x,y) = (-2,-4)$.

Huomautus 6.2.4 Kun ehdokkaat sidotun ääriarvo-ongelman ratkaisuksi on löydetty, ääriarvon olemassaolo ja laatu tarkastellaan erikseen. Kysymys voidaan palauttaa yhden muuttujan funktion ääriarvo-ongelmaksi, jos ehdosta $g(x,y) = 0$ saadaan y x:n funktiona tai x y:n funktiona lokaalisti. Esimerkin 6.2.3 tapauksessa

(a) pisteessä $(4,4)$ lokaalisti $y = \sqrt{25 - (x-1)^2}$,

(b) pisteessä $(-2,-4)$ lokaalisti $y = -\sqrt{25 - (x-1)^2}$.

Tyydymme kuitenkin tarkastelemaan vain mahdollisia ääriarvopisteitä sidotun ääriarvo-ongelman yhteydessä.

6.3 Globaalit ääriarvot

Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ suljettu ja rajoitettu (=kompakti). Rajoitettu tarkoittaa sitä, että $B(\overline{0}, r) \subset E$ jollekin $r > 0$. Pidämme ilman todistusta tunnettuna analyysin perustuloksen joka sanoo, että jatkuva funktio $f : E \to \mathbf{R}$ saa joukossa E suurimman ja pienimmän arvonsa, ts. on olemassa pisteet $\overline{x}, \overline{y} \in E$ siten, että

$$f(\overline{x}) \leq f(\overline{z}) \leq f(\overline{y})$$

kaikilla $\overline{z} \in E$. Todistusta käsitellään kursseilla Metriset avaruudet/Analyysi 4. Pidetään myös tunnettuna, että tasa-arvokäyrät $g(x,y)=0$ ovat suljettuja joukkoja aina kun g on jatkuva. Näin ollen jatkuva funktio f saa tasa-arvokäyrällä $g(x,y)=0$ suurimman ja pienimmän arvonsa jos käyrä $g(x,y)$ on rajoitettu.

Esimerkki Tärkeitä ja yksinkertaisia esimerkkejä suljetuista ja rajoitetuista eli kompakteista joukoista avaruudessa $\mathbf{R}^n$ ovat

$$\begin{aligned} J(\overline{a},\overline{b}) &= \{\, t\overline{a}+(1-t)\overline{b} \mid t \in [0,1]\,\}(\text{Suljettu jana}) \\ \partial B(\overline{a},r) &= \{\, \overline{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\overline{x}-\overline{a}| = r\,\}(\text{Pallopinta}) \\ \overline{B}(\overline{a},r) &= \{\, \overline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid |\overline{x}-\overline{a}| = r\,\}(\text{Suljettu pallo}). \end{aligned}$$

Esimerkiksi näissä joukoissa jatkuva funktio saa aina suurimman ja pienimmän arvonsa. Myös esimerkiksi tason monikulmiot ovat kompakteja joukkoja, jos monikulmio ymmärretään monikulmiota rajoittavien janojen sisään jäävien pisteiden ja reunajanojen yhdisteeksi.

Globaalilla ääriarvoilla tarkoitetaan funktion $f : E \to \mathbf{R}$ suurinta/pienintä arvoa joukossa $E \subset \mathbf{R}^n$, jos kyseiset arvot ovat olemassa. Globaalit ääriarvot saadaan joko gradientin nollakohdissa tai reunakäyrällä sidotun ääriarvotehtävän ratkaisuna tapauksessa, jossa E on jonkin reunakäyrän sisään jäävä alue.

Esimerkki 6.3.1 (a) Määrätään pisteen $(1,2)$ etäisyys suorasta $y=3x+4$. Etäisyydellä tarkoitetaan pistettä $(1,2)$ lähimpänä olevan suoran $y=3x+4$ pisteen etäisyyttä pisteestä $(1,2)$, ts. funktion

$$(x,y) \mapsto \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

pienintä arvoa suoralla $y=3x+4$. Kyseessä on globaali sidottu ääriarvotehtävä. Laskujen helpottamiseksi voidaan yhtä hyvin minimoida funktiota

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2$$

suoralla $y=3x+4$ eli funktiota

$$g(x)=(x-1)^2+(3x+4-2)^2=x^2-2x+1+9x^2+12x+4=10x^2+10x+5$$

kun $x \in \mathbf{R}$. Derivaatta on $g'(x)=20x+10=0$ ja derivaatan nollakohdaksi saadaan $x=-\frac{1}{2}$. Etäisyydeksi saadaan

$$\sqrt{(-\frac{1}{2}-1)^2+(-\frac{3}{2}+4-2)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

(b) Onko funktiolla

$$f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$$

suurinta/pienintä arvoa joukossa $\mathbf{R}^2$? Globaalit ääriarvot ovat lokaaleja ääriarvoja ja löytyvät siten gradientin nollakohdista. Nyt

$$D_1 f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)} = 0 \quad \text{ja} \quad D_2 f(x, y) = -2xye^{-(x^2+y^2)} = 0$$

jos ja vain jos $1 - 2x^2 = 0$ ja $-2xy = 0$ eli mahdolliset ääriarvopisteet ovat $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Arvoiksi saadaan

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Sijoittamalla napakoordinaatit saadaan

$$|f(x, y)| = |f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| = r|\cos\varphi|e^{-r^2} \leq re^{-r^2} \leq re^{-r^2}$$

ja tiedon $\lim_{r\to\infty} re^{-r^2} = 0$ (ks. Analyysi I) avulla päätellään, että on olemassa $R > 1$ jolle

$$|f(x, y)| < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$$

kaikilla $x^2 + y^2 > R^2$. Tiedetään, että funktio f saa suurimman ja pienimmän arvon kompaktissa joukossa $\overline{B}(\bar{0}, R)$. Nämä arvot ovat välttämättä lokaaleja ääriarvoja, joten arvot

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$$

ovat suurin ja pienin arvo pallossa $\overline{B}(\bar{0}, R)$. Kyseiset arvot ovat myös suurin ja pienin arvo koko avaruudessa $\mathbf{R}^2$.

(c) Määrätään funktion

$$f(x, y) = xy + x$$

suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{\, x^2 + y^2 \leq 1 \,\}$. Koska suljettu pallo on aina kompakti, tiedetään että suurin ja pienin arvo ovat olemassa. Nämä löytyvät joko gradientin nollakohdista tai pallon reunan niistä pisteistä, joille pätee Lauseen 6.2.2 determinanttiehto. Funktion f gradientti on $\nabla f(x, y) = (y+1, x)$, joten $\nabla f(x, y) = 0$ jos ja vain jos $(x, y) = (0, -1)$. Pisteessä $(0, -1)$ arvoksi saadaan $f(0, -1) = 0$. Merkitään

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

ja ratkaistaan Lauseen 6.2.2 determinanttiehto. Saadaan

$$\begin{vmatrix} D_1f(x,y) & D_2f(x,y) \\ D_1g(x,y) & D_2g(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+1 & x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 + 2y - 2x^2 = 0.$$

Siis reunalla $x^2 + y^2 = 1$ mahdolliset ääriarvopisteet löytyvät yhtälöparin

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ 2y^2 + 2y - 2x^2 & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ 2y^2 + 2y - 2(1 - y^2) & = & 0 \end{array}$$

ratkaisuista. Ratkaisuiksi saadaan $(x, y) = (0, -1)$ tai $(x, y) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Arvot näissä pisteissä ovat

$$\begin{array}{rcl} f(0, -1) & = & 0 \\ f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) & = & \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}, \end{array}$$

joten suurin arvo on $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ja pienin arvo on $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(d) Määrätään käyrän

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 100$$

etäisyys origosta. Riittää siis minimoida funktiota $f(x, y) = x^2 + y^2$ käyrällä

$$g(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 100 = 0$$

Minimi on olemassa, sillä riittää tarkastella minimia epätyhjässä joukossa $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) \} \cap \overline{B}(\overline{0}, R)$, joka on kompakti. Itseasiassa tasa-arvokäyrä $g(x, y) = 0$ on kallellaan oleva origokeskinen ellipsi. Yleisesti tasa-arvokäyrä

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

on ellipsi kun $AB - C^2 > 0$, ks. Solmu 1/2001 (solmu.math.helsinki.fi). Pienimmän arvon määräämiseksi ratkaistaan Lauseen 6.2.2 determinanttiehto. Saadaan

$$\begin{vmatrix} D_1f(x,y) & D_2f(x,y) \\ D_1g(x,y) & D_2g(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x + 2y & 2x + 4y \end{vmatrix} = 4x^2 + 4xy - 4y^2 = 0.$$

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 4x^2 + 4xy - 4y^2 \\ 0 & = & x^2 + 2xy + 2y^2 - 100 \end{array}$$

sijoittamalla napakoordinaatit $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$. Saadaan

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 4r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi) \\ 0 & = & r^2(1 + \sin\varphi^2 + 2\cos\varphi\sin\varphi) - 100. \end{array}$$

Koska $r \neq 0$, on välttämättä

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

eli

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\cos 2\varphi)^2}.$$

Korottamalla puolittain toiseen saadaan

$$5(\cos^2 \varphi)^2 = 1 \quad \text{eli} \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

ko. toisen asteen polynomi x:n suhteen ja saadaan

$$x = \frac{-4y \pm \sqrt{80y^2}}{8} = \frac{1}{2} y(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Tästä saadaan ratkaisuiksi kulmat

$$\varphi = \arccos \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sijoittamalla nämä kulmat ehtoon $r^2(1 + \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi \sin \varphi) = 100$, saadaan pienimmäksi r:n arvoksi $r \approx 6.18$. Kyseessä on ellipsin lyhyemmän pääakselin pituuden puolikas.