Analyyysi II

Visa Latvala ja Jari Taskinen

9. toukokuuta 2003

Sisältö

7 Käyräintegraalit

7.1 Lyhyesti Riemannin integraalista

Jos f on positiivinen jatkuva funktio $[a, b] \to \mathbf{R}$, sen *Riemannin integraali*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

antaa kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alan. Tämä seuraa (lyhyesti ilmaistuna) siitä, että *Riemannin summat* approksimoivat kyseistä pinta-alaa ja integraali määritellään Riemannin summien raja-arvona, kun pisimmän osavälin pituus menee kohti nollaa, ks. Thomas: Calculus, s. 364. Integraalin määritelmä ei sinänsä edellytä funktion f positiivisuutta ja määritelmää huolella analysoitaessa osoittautuu, että tietyt epäjatkuvat funktiot (esim. jokainen kasvava tai vähenevä funktio $[a, b] \to \mathbf{R}$) ovat integroituvia. Riemannin integraalin laskeminen voidaan usein suorittaa *analyysin peruslauseen* avulla, joka sanoo, että

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

jos funktiolle $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ pätee

$$F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in [a, b]$ (tässä derivaatta ymmärretään toispuoleisena välin päätepisteissä a ja b). On kuitenkin helppo antaa esimerkkejä alkeisfunktioista, joiden integraalifunktiota ei tunneta eksplisiittisesti. Mm. normaalijakauman tiheysfunktio on tälläinen. Riemannin integraalilla on seuraavat perusominaisuudet.

Lemma 7.1.1 Jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ja $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia, niin

(i) $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$,

(ii) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ kaikilla $a < c < b$,

(iv) Jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)$.

Merkinnällä

$$\int f(x)\,dx$$

tarkoitetaan funktion f integraalifunktiota, ts. funktiota F jolle $F'(x) = f(x)$ funktion f määrittelyjoukossa. Integroinnilla tarkoitetaan usein integraalifunktion etsimistä. Palautetaan lyhyesti mieleen keskeiset integroimiskeinot.

Esimerkki 7.1.2 (a) Tavanomaisin integroimiskeino on se, että integraalin sisällä oleva funktio muokataan jonkin funktion derivaataksi. Esimerkiksi

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int D((1+x^2)^{\frac{3}{2}})\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in R.$$

(b) Osittaisintegrointikaava saadaan tulon derivoimissäännöstä

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

integroimalla puolittain. Saadaan

$$f(x)g(x) = \int (fg)'(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

joten

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \textstyle\int \arctan x\,dx &= \textstyle\int (\arctan x)(Dx)\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= x\arctan x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

(c) Muuttujanvaihto (eli integrointi sijoituksen avulla) perustellaan kurssilla Analyysi III. Tarkastellaan esimerkiksi määrättyä integraalia

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Merkitään $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, jolloin

$$x'(t) := \frac{dx}{dt} = \cos t.$$

Näin merkitsemällä saa muistisäännön joka toimii muuttujanvaihdon yhteydessä. Saadaan $dx = \cos t dt$ joka sijoitetaan alkuperäiseen integraaliin. Integroimisrajat muuttuvat muunnoksen mukaisesti, joten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

7.2 Käyräintegraalin määritelmä

Käyräintegraali on alunperin kehitetty fysiikan tarpeisiin. Käyräintegraali on myös osoittautunut tärkeäksi työkaluksi mm. kompleksianalyysissa ja potentiaaliteoriassa.

Olkoon $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ jatkuva. Tällöin $\Gamma := \varphi\left([a, b]\right)$ on käyrä tasossa $\mathbf{R}^2$. Kuvaus φ on käyrän Γ *parametriesitys*.

Jos käyrällä on parametriesitys, joka on *bijektio*, sitä sanotaan *kaareksi*. Kiinnittämällä toinen kaaren päätepisteistä *alkupisteeksi* ja toinen *loppupisteeksi* sanotaan, että kaari on *suunnistettu*. Jokaisella kaarella on siis kaksi suunnistusta. Kaari on *säännöllinen*, jos sillä on jatkuvasti derivoituva parametriesitys.

Määritelmä 7.2.1 Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ säännöllinen suunnistettu kaari ja olkoon $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ kaaren Γ jatkuvasti derivoituva parametriesitys siten, että $\varphi(a)$ on kaaren Γ alkupiste. Tällöin jatkuvan kuvauksen (vektorikentän) $f = (f_1, f_2) : \Gamma \to \mathbf{R}^2$ käyräintegraali on luku

$$\int\limits_{\Gamma} f_1\, dx + f_2\, dy := \int\limits_{a}^{b} [f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + f_2(\varphi(t))\varphi_2'(t)]\, dt.$$

Huomautus 7.2.2 (a) Eksakti käyräintegraalin määritelmä lähtee siitä, että Riemannin summien konvergenssin idea yleistetään käyrille. Tällöin Määritelmän 7.2.1 yhtälö voidaan todistaa tasaisen jatkuvuuden avulla, ks. esim. Lehto: Differentiaali- ja integraalilaskenta II. Samalla myöskin nähdään, että integraalin arvo ei riipu käytetystä parametriesityksestä.

(b) Määritelmä 7.2.1 yleistää tutun Riemannin integraalin

$$\int_a^b f(u)\, du$$

seuraavasti: Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, Γ jana pisteestä $(a, 0)$ pisteeseen $(b, 0)$ ja $F : \Gamma \to \mathbf{R}^2$ vektorikenttä

$$F(x, y) = (f(x), 0), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Tällöin (harjoitustehtävä)

$$\int_\Gamma F_1\, dx + F_2\, dy = \int_a^b f(u)\, du.$$

Esimerkki Lasketaan
$$\int_\Gamma x^2\,dx + xy\,dy,$$
kun Γ on yksikköympyrän kaari pisteestä $(1,0)$ pisteeseen $(0,1)$.

Lasketaan käyräintegraali napakoordinaatteihin liittyvällä parametriesityksellä
$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \cos t \\ y = \varphi_2(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$
Nyt $f(x,y) = (x^2, xy)$ ja $\varphi_1'(t) = -\sin t$, $\varphi_2'(t) = \cos t$, joten
$$\int_\Gamma x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^{\pi/2} \Big(\cos^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \sin t \cos t\Big)\,dt = 0.$$

Kannattaa huomata, että käyräintegraalin (a priori omituinen) merkintätapa sisältää muistisäännön käyräintegraalin laskemiseksi. Merkitsemällä
$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$
ja kirjoittamalla samaan tapaan kuin integraalin muuttujanvaihdon yhteydessä
$$\begin{aligned} dx &= -\sin t\,dt \\ dy &= \cos t\,dt \end{aligned}$$
käyräintegraalin tulos saadaan sijoittamalla x, y, dx, dy käyräintegraalin merkintään ja integroimalla yli parametriesityksen määrittelyvälin.

Käyräintegraali voidaan laskea myös esimerkiksi käyttäen parametriesitystä
$$\begin{cases} x = -t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 0]\,.$$
Tällöin $dx = -dt$ ja $dy = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, joten muistisäännön mukaisesti
$$\int_\Gamma x^2\,dx + xy\,dy = \int_{-1}^{0} \left(t^2 \cdot (-1) + (-t)\sqrt{1-t^2} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt = \int_{-1}^{0} (-t^2 + t^2)\,dt = 0.$$

Määritelmän yleistykset

Yleisessä dimensiossa käyräintegraali määritellään vastaavasti. Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ säännöllinen suunnistettu kaari ja olkoon $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a,b] \to$

$\mathbf{R}^n$ jatkuvasti derivoituva parametriesitys siten, että $\varphi(a)$ on kaaren $\varphi = \varphi([a,b])$ alkupiste. Jos funktiot $f_j : \Gamma \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia, $j = 1, 2, \ldots, n$, niin kuvauksen $f = (f_1, \ldots, f_n)$ (vektorikentän) käyräintegraali on

$$\int\limits_{\Gamma} f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n := \int\limits_a^b [f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + f_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)]\,dt.$$

Sama asia ilmaistaan toisinaan lyhyesti merkitsemällä

$$\int\limits_{\Gamma} \overline{f} \cdot d\overline{r} := \int\limits_{\Gamma} f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n.$$

Merkintä Tapauksissa $n = 2$, $n = 3$, käytetään merkintöjä

$$\int_{\Gamma} f_1\,dx + f_2\,dy, \quad \int_{\Gamma} f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz.$$

Määritellään seuraavaksi käyräintegraali yli säännöllisten peräkkäisten kaarien yhdisteen. Olkoot Γ_i ja Γ_{i+1} suunnistettuja säännöllisiä kaaria siten, että Γ_i:n loppupiste on Γ_{i+1}:n alkupiste, $i = 1, \ldots, k$. Tällöin käyräintegraali yli yhdisteen $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ määritellään summana

$$\int\limits_{\Gamma} f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n := \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_i} f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$$

kaikille jatkuville vektorikentille $f : \Gamma \to \mathbf{R}^n$. *Integroimistietä* Γ sanotaan *paloittain säännölliseksi.*

Huomautus Edellisen määritelmän voi tulkita Riemannin integraalia koskevan yhtälön

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b,$$

yleistyksenä.

Esimerkki 7.2.3 Lasketaan integraali

$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx - x\,dy + dz,$$

kun

(a) Γ on jana jonka alkupiste on $(1, 0, 0)$ ja loppupiste $(0, 1, 1)$,

(b) Γ on ruuviviiva $\Gamma = \Big\{(\cos t, \sin t, \frac{2}{\pi}t) \mid t \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]\Big\}$.

Kohdassa (a) kaaren Γ parametriesitys on muotoa

$$\varphi(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,1,1) = (1-t,t,t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)),$$

missä $t \in [0,1]$. Nyt $f(x,y,z) = (y,-x,1)$ ja $\varphi_1'(t) = -1$, $\varphi_2'(t) = 1 = \varphi_3'(t)$, joten

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y\,dx - x\,dy + dz &= \int_0^1 \Big(\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t) + \varphi_3'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \Big(t\cdot(-1) - (1-t)\cdot 1 + 1\Big)\,dt \\
&= \int_0^t -t - 1 + t + 1\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Lasketaan kohta (b) muistisääntöä käyttäen. Kaaren Γ parametriesitys on siis muotoa

$$(x,y,z) = (\cos t, \sin t, \frac{2}{\pi}t),$$

missä $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
dx &= -\sin t\,dt \\
dy &= \cos t\,dt \\
dz &= \tfrac{2}{\pi}\,dt,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y\,dx - x\,dy + dz &= \int_0^{\pi/2} [(\sin t)(-\sin t) - (\cos t)(\cos t) + \tfrac{2}{\pi}]\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [-\sin^2 t - \cos^2 t + \tfrac{2}{\pi}]\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [-1 + \tfrac{2}{\pi}]dt = \tfrac{\pi}{2}(-1 + \tfrac{2}{\pi}) = 1 - \tfrac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.2.4 Tarkastellaan massapistettä, joka liikkuu pitkin $\mathbf{R}^3$:n käyrää Γ, kun kappaleeseen vaikuttaa voima

$$\overline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

kussakin pisteessä $(x,y,z) \in \Gamma$. Olkoon massapisteen sijainti ajan t funktiona

$$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

missä $t \in [a,b]$ ($\overline{r}(t)$ on käyrän Γ parametriesitys).

Kun aika muuttuu (vähän) hetkestä t hetkeen $t + \Delta t$, massapisteen paikan muutos on

$$\begin{aligned} \Delta \overline{r} &= \overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t) = \Big(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t)\Big) \\ &\cong \Big(x'(t)(\Delta t), y'(t)(\Delta t), x'(t)(\Delta t)\Big) = (\Delta t) r'(t). \end{aligned}$$

Tällä välillä tehty työ on

$$\Delta W \cong \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \Delta \overline{r} = [\overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot r'(t)] \Delta t.$$

Halutaan laskea työ W, joka tehdään, kun massapiste siirtyy alkupisteestä $\overline{r}(a)$ loppupisteeseen $\overline{r}(b)$. Jaetaan aikaväli $[a,b]$ "hyvin pieniin"osaväleihin $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Työksi osavälillä $[t_{k-1}, t_k]$ saadaan edellisen nojalla

$$\Delta W \cong \overline{F}(\overline{r}(t_{k-1})) \cdot r'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$

joten koko työ on

$$W \cong \sum_{k=1}^{n} \overline{F}(\overline{r}(t_{k-1})) \cdot r'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Kyseessä on funktion $\overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)$ Riemannin summa, joka funktion jatkuvuuden nojalla suppenee aikajaon tihentyessä rajatta kohti integraalia

$$\int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\, dt.$$

Siis tarkasteltava työ W on voimafunktion F käyräintegraali

$$W = \int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\, dt = \int_\Gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz.$$

Voidaan helposti yleisesti osoittaa, että jos käyrän suunnistus vaihdetaan, niin käyräintegraalin arvo muuttuu vastakkaismerkkiseksi. Tarkastellaan tätä esimerkin kautta.

Esimerkki 7.2.5 Olkoon f vektorikenttä

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

(kyseinen funktio on fysiikassa tietty magneettikenttä). Lasketaan käyräintegraalit yli ympyrän $\Gamma = \partial B(\overline{0}, R)$ kumpaankin suuntaan. Integroitaessa positiiviseen suuntaan parametriesitys on

$$(x, y) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Siis $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$, joten käyräintegraaliksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy &= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{-R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \tfrac{R\cos t}{R^2}(R\cos t)\right)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\,dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Integroitaessa negatiiviseen suuntaan käyräintegraalin arvoksi saadaan -2π (harjoitustehtävä).

7.3 Vektorikentän potentiaali

Vektorikentän potentiaali liittyy siihen kuinka analyysin peruslause yleistetään useamman muuttujan funktioille. Tämän suuntaiset ideat ovat keskeisiä kompleksianalyysissä, toisaalta teorialle on käyttöä esimerkiksi fysiikassa.

Joukko $U \subset \mathbf{R}^n$ kutsutaan jatkossa *alueeksi*, jos U on avoin ja yhtenäinen. Avoin joukko $U \subset \mathbf{R}^n$ on *(polku)yhtenäinen*, jos jokaista $\overline{x}, \overline{y} \in U$ vastaa murtoviiva $J \subset U$, jonka alkupiste on $\overline{x}$ ja loppupiste on $\overline{y}$.

Määritelmä 7.3.1 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ alue ja olkoon $f : U \to \mathbf{R}^n$ vektorikenttä. Jos on olemassa differentioituva funktio $u : U \to \mathbf{R}$ siten, että $\nabla u = f$, niin u on funktion f *potentiaali (joukossa U)*. Tällöin sanotaan, että differentiaalimuoto

$$f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

on *eksakti* ja u on sen *integraalifunktio.*

Esimerkki 7.3.2 (a) Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = (3x^2 y + \cos(x + y), x^3 + \cos(x + y)).$$

Tällöin funktio

$$u(x, y) = x^3 y + \sin(x + y)$$

on vektorikentän f potentiaali, sillä

$$D_1 u(x, y) = 3x^2 y + \cos(x + y) \quad \text{ja} \quad D_2 u(x, y) = x^3 + \cos(x + y).$$

(b) Olkoon

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right),$$

missä

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0.$$

Siis vektorikenttä f on määritelty joukossa $\mathbf{R}^3 \setminus \{\overline{0}\}$. Funktiolla f on potentiaali $u(x, y, z) = -\frac{1}{r}$, sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned} D_1 u(x, y, z) &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(-(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) \\ &= \tfrac{x}{r^3} = f_1(x, y, z). \end{aligned}$$

Muut osittaisderivaatat todetaan vastaavasti.

Huomautus 7.3.3 Potentiaali on vakiota vaille yksikäsitteinen (aivan kuten tuttu yhden muuttujan integraalifunktiokin): Jos nimittäin u ja v ovat funktion f potentiaaleja joukossa U, niin

$$\nabla u(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}) = \nabla v(\overline{x})$$

kaikilla $\overline{x} \in U$. Siis funktiolle $w := u - v$ pätee

$$\nabla w(\overline{x}) = \nabla u(\overline{x}) - \nabla v(\overline{x}) = 0$$

kaikilla $\overline{x} \in U$. Jos $U = \mathbf{R}^2$, niin väliarvolauseen mukaan

$$w(\overline{x}) - w(\overline{0}) = \nabla w(\overline{x}')(\overline{x} - \overline{0}) = 0$$

kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$ eli w on vakio. Yleisessä alueessa U samaan tulokseen päädytään, koska kaksi pistettä $\overline{x}, \overline{y} \in U$ on aina yhdistettävissä murtoviivalla joka sisältyy alueeseen U (täsmällinen tarkastelu sivuutetaan).

Lause 7.3.4 Olkoon $f : U \to \mathbf{R}^n$ alueessa $U \subset \mathbf{R}^n$ jatkuva vektorikenttä ja olkoon $u : U \to \mathbf{R}$ vektorikentän f potentiaali. Jos $\overline{a}, \overline{b} \in U$ ja $\Gamma \subset U$ on paloittain säännöllinen tie alkupisteenä $\overline{a}$ ja loppupisteenä $\overline{b}$, niin

$$\int_\Gamma f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n = u(\overline{b}) - u(\overline{a}).$$

Todistus. Oletetaan aluksi, että Γ on säännöllinen kaari eli Γ:lla on jatkuvasti derivoituva parametriesitys $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [\alpha, \beta] \to \Gamma$. Koska $\nabla u = f$, ketjusäännön mukaan

$$(u \circ \varphi)'(t) = \nabla u(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

kaikilla $t \in [\alpha, \beta]$, joten käyräintegraalin määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u \circ \varphi)'(t)\, dt \\
&= (u \circ \varphi)(\beta) - (u \circ \varphi)(\alpha) = u(\bar{b}) - u(\bar{a}).
\end{aligned}$$

Jos Γ on paloittain säännöllinen tie, sama tulos saadaan summaamalla. Esimerkiksi, jos $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, missä Γ_1:n loppupiste $\bar{c}$ on Γ_2:n alkupiste ja Γ_i:t ovat säännöllisiä kaaria, niin edellisen nojalla

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n &= \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Gamma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n \\
&= u(\bar{c}) - u(\bar{a}) + (u(\bar{b}) - u(\bar{c})) = u(\bar{b}) - u(\bar{a}).
\end{aligned}$$

$\square$

Huomautus Huomaa, että

(a) Lause 7.3.4 on analyysin peruslauseen useampiulotteinen vastine,

(b) Lause 7.3.4 myöskin kertoo, että käyräintegraalin arvo ei riipu integroimistiestä silloin kun potentiaali on olemassa.

Esimerkki Jos vektorikentän potentiaali tunnetaan, käyräintegraalien laskeminen on helppoa. Lasketaan esimerkiksi

$$\int\limits_{\Gamma} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz,$$

kun Γ on ruuviviiva $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Siis alkupiste on $(1, 0, 0)$ ja loppupiste on $(1, 0, 2\pi)$. Nyt integroitavalla vektorikentällä on potentiaali

$$u(x, y, z) = xyz$$

alueessa $\mathbf{R}^3$, sillä $\nabla u(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Lauseen 7.3.4 nojalla

$$\int\limits_{\Gamma} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz = u(1, 0, 2\pi) - u(1, 0, 0) = 1 \cdot 0 \cdot 2\pi - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Potentiaalin olemassaolo ja sen määrääminen

Edellisen esimerkin innoittamana on luonnollista kysyä:

(a) Kuinka tiedetään, milloin potentiaali on olemassa?

(b) Jos tiedetään, että potentiaali on olemassa, kuinka potentiaali löydetään?

Tarkastellaan näitä kysymyksiä seuraavaksi.

Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ alue ja oletetaan, että u on jatkuvasti derivoituvan vektorikentän $f = (f_1, f_2)$ potentiaali alueessa U. Tällöin $D_1 u(\overline{x}) = f_1(\overline{x})$ ja $D_2 u(\overline{x}) = f_2(\overline{x})$ kaikilla $\overline{x} \in U$. Koska $f_1, f_2 \in \mathbf{C}^1(U)$, niin $u \in \mathbf{C}^2(U)$ ja Lauseen 3.3.2 mukaan derivoimisjärjestystä voi vaihtaa ilman että tulos muuttuu. Siis kaikilla $\overline{x} \in U$ pätee

$$D_1(D_2 u(\overline{x})) = D_2(D_1 u(\overline{x})) \quad \text{eli} \quad D_1 f_2(\overline{x}) = D_2 f_1(\overline{x}).$$

Näin ollen kaikissa tasoalueissa U ehto

$$D_1 f_2 = D_2 f_1$$

on välttämätön potentiaalin olemassaololle.

Esimerkki 7.3.5 Ehdon $D_1 f_2 = D_2 f_1$ avulla voidaan helposti löytää vektorikenttiä, joilla ei ole potentiaalia. Olkoon

$$f(x, y) = (10x^2, \cos x + e^y).$$

Nyt $D_1 f_2(x, y) = -\sin x$ ja $D_2 f_1(x, y) = 0$, joten ehto $D_1 f_2 = D_2 f_1$ *ei päde*. Siispä vektorikentällä f ei ole potentiaalia. Vastaavia esimerkkejä löytyy helposti lisää.

Lause 7.3.6 Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Tällöin funktiolla f on potentiaali jos ja vain jos integroituvuusehto

$$D_1 f_2(\overline{x}) = D_2 f_1(\overline{x})$$

pätee kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$.

Todistus. Jos vektorikentällä on potentiaali joukossa $\mathbf{R}^2$, niin integroituvuusehto pätee (todettu yllä kaikille alueille).

Oletetaan, että $D_2 f_1(x, y) = D_1 f_2(x, y)$ kaikilla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Valitaan $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ ja määritellään funktio $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ asettamalla $u(\overline{a}) = 0$ ja

$$u(x, y) := \int_\Gamma f_1\, dx + f_2\, dy,$$

kun Γ on murtoviiva pisteestä (a_1, a_2) pisteeseen (a_1, y) ja edelleen pisteeseen $(x, y) \neq \overline{a}$. Tällöin

$$u(x,y) = \int_{a_2}^{y} f_2(a_1, t)\, dt + \int_{a_1}^{x} f_1(s, y)\, ds,$$

sillä ensimmäisen janan parametriesitys on (a_1, t), kun $t \in [a_2, y]$, ja toisen janan parametriesitys on (s, a_2), kun $s \in [a_2, x]$. Nyt (Analyysi III)

$$D_1 u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{a_1}^{x} f_1(s,y)\, ds\right) = f_1(x,y)$$

ja voidaan osoittaa myös, että $D_2 u(x,y) = f_2(x,y)$ (sivuutetaan). $\square$

Huomautus Lause 7.3.6 pätee esimerkiksi avoimissa palloissa $B(\overline{x}, r)$, avoimissa puolitasoissa eli yleisemmin alueissa $U \subset \mathbf{R}^2$, joilla on ominaisuus: On olemassa $\overline{a} \in U$ siten, että kaikilla $(x, y) \in U$ murtoviiva $(a_1, a_2) \to (a_1, y) \to (x, y)$ sisältyy alueeseen U.

Esimerkki 7.3.7 Lause 7.3.6 ei kuitenkaan päde kaikissa alueissa. Olkoon f magneettikenttä

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

alueessa $\mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} D_2 f_1(x,y) &= \tfrac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ D_1 f_2(x,y) &= \tfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

joten ehto $D_2 f_1 = D_1 f_2$ pätee alueessa $\mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$. Oletetaan, että vektorikentällä f on potentiaali alueessa $\mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$. Olkoon Γ yksikköympyrän reuna eli käyrä $x^2 + y^2 = 1$. Nyt Lauseen 7.3.4 nojalla

$$\int_{\Gamma} f_1\, dx + f_2\, dy = u(\overline{b}) - u(\overline{a}) = 0,$$

koska käyrän Γ loppupiste $\overline{b}$ ja $\overline{a}$ ovat samat, esimerkiksi $\overline{a} = \overline{b} = (1, 0)$. Aiemmin kuitenkin laskettiin, että ko. käyräintegraali on 2π. Siis potentiaalia u ei ole olemassa alueessa $\mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$. Itseasiassa voidaan osoittaa, että Lause 7.3.6 pätee alueissa, joissa ei ole ”reikiä”.

Olkoon f kenttä

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

alueessa $\mathbf{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Kyseessä on tietty sähkökenttä. Nyt helposti nähdään, että

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C, \quad C \in \mathbf{R},$$

on kentän f potentiaali. Siis ko. magneetti- ja sähkökenttä ovat olennaisesti erilaiset matemaattisilta omainaisuuksiltaan.

Huomautus 7.3.8 Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ alue ja $f : U \to \mathbf{R}^n$ vektorikenttä. Tällöin välttämätön ehto potentiaalin $u : U \to \mathbf{R}$ olemassaololle on se, että

$$D_i f_j(\bar{x}) = D_j f_i(\bar{x})$$

kaikilla $i, j = 1, \ldots n$, $i \neq j$, ja $\bar{x} \in U$. Tämä todetaan aivan kuten yllä dimensiossa kaksi. Tapauksessa $n = 3$ merkitään

$$\nabla \times f := (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_1 f_3 - D_3 f_1, D_1 f_2 - D_2 f_1).$$

Vektorikenttää $\nabla \times f$ kutsutaan *roottoriksi*. Siis integroituvuusehto pätee jos ja vain jos $\nabla \times f = \bar{0}$ alueessa $U \subset \mathbf{R}^3$. Yhdesti yhtenäisissä alueissa $U \subset \mathbf{R}^3$ (esim. avoin pallo, $\mathbf{R}^3$) integroituvuusehto voidaan todistaa myös riittäväksi potentiaalin olemassaololle.

Esimerkki Tutkitaan, onko vektorikentällä

$$f(x, y, z) = \left(\frac{a}{z}, -\frac{b}{z}, \frac{by - ax}{z^2} \right)$$

potentiaalia, kun $a, b \in \mathbf{R}$ ovat vakioita. Jos $z \neq 0$, niin

$$\begin{array}{rcl} D_1 f_2(x, y, z) & = & 0 = D_2 f_1(x, y, z), \\ D_1 f_3(x, y, z) & = & -\frac{a}{z^2} = D_3 f_1(x, y, z), \\ D_2 f_3(x, y, z) & = & \frac{b}{z^2} = D_3 f_2(x, y, z). \end{array}$$

Siis $\nabla \times f = 0$ kun $z \neq 0$. Potentiaali on olemassa esimerkiksi jokaisessa avoimessa pallossa joka ei leikkaa (x, y)-tasoa.

Tarkastellaan seuraavaksi kuinka potentiaaleja voidaan määrätä.

Esimerkki 7.3.9 Olkoon

$$f(x, y) = (5x^4 y^4, 4x^5 y^3 + 1),$$

missä $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Todetaan ensin, että

$$D_1 f_2(x, y) = 20x^4 y^3 = D_2 f_1(x, y),$$

joten potentiaali u on olemassa tasossa $\mathbf{R}^2$. Päätellään seuraavasti: Jos $D_1u(x,y) = 5x^4y^4$, niin

$$u(x,y) = \int 5x^4y^4\,dx = x^5y^4 + C(y),$$

missä $C(y)$ on vain muuttujasta y riippuva funktio. Derivoimalla y:n suhteen saadaan ehdon $D_2u(x,y) = f_2(x,y)$ nojalla

$$D_2u(x,y) = 4x^5y^3 + C'(y) = 4x^5y^3 + 1,$$

joten $C'(y) = 1$ eli $C(y) = y + C$. Saadaan

$$u(x,y) = x^5y^4 + y + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Tarkistamalla havaitaan, että kyseessä todella on potentiaali.

Edellä esitetty metodi ei aina toimi. Tällöin voidaan käyttää seuraavaa metodia, joka toisaalta toimii mielivaltaisessa dimensiossa: Olkoon $f : U \to \mathbf{R}^2$ vektorikenttä, jolla on potentiaali $u : U \to \mathbf{R}$. Lauseesta 7.3.4 seuraa, että

$$u(x,y) = -u(a,b) + \int_\Gamma f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2,$$

missä $(a,b) \in U$ on kiinteä ja $\Gamma \subset U$ on mikä hyvänsä paloittain säännöllinen tie alkupisteenä (a,b) ja loppupisteenä (x,y). Voidaan olettaa $u(a,b) = 0$ (Huomautus 7.3.3). Usein integroimistieksi kannattaa valita koordinaattiakselien suuntainen murtoviiva.

Esimerkki 7.3.10 (a) Lasketaan vektorikentän

$$f(x,y) = (5x^4y^4, 4x^5y^3 + 1)$$

potentiaali u käyräintegraalimetodilla. Olkoon $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ ja $u(0,0) = 0$. Valitaan integroimistie $\Gamma : (0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ ja käytetään parametriesityksiä $(t,0)$ ja (x,s), missä $t \in [0,x]$ ja $s \in [0,y]$. Saadaan

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_\Gamma 5x^4y^4\,dx + (4x^5y^3+1)\,dy \\ &= \int_0^x 5t^4 \cdot 0\,dt + \int_0^y (4x^5s^3+1)\,ds = x^5y^4 + y. \end{aligned}$$

Huomaa, että x ja y esiintyvät laskussa kahdessa eri roolissa, mikä sallittakoon esityksen yksinkertaistamiseksi.

(b) Lasketaan vektorikentän

$$f(x,y,z) = (e^y, xe^y, -2z)$$

potentiaali käyräintegraalimetodilla. Olkoon $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ ja $u(0,0,0) = 0$. Valitaan integroimistie $\Gamma : (0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$ ja käytetään parametriesityksiä $(t,0,0)$, $(x,s,0)$, (x,y,u), missä $t \in [0,x]$, $s \in [0,y]$ ja $u \in [0,z]$. Saadaan

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_\Gamma e^y\,dx + xe^y\,dy - 2z\,dz \\ &= \int_0^x e^0\,dt + \int_0^y xe^s\,ds + \int_0^z 2u\,du \\ &= x + xe^y + 2z. \end{aligned}$$

Tarkistamalla havaitaan, että kyseessä todella on vektorikentän f potentiaali.

7.4 Käyrän pituus ja integrointi kaaren pituuden suhteen

Esimerkki 7.4.1 ”Todistetaan”, että ympyrän $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$, kehän pituus on $2\pi R$. Approksimoidaan ympyrän kehän pituutta säännöllisen n-kulmion kehän Γ_n pituudella. Umpinainen murtoviiva Γ_n koostuu n:stä yhtä pitkästä janasta. Esimerkiksi, jos $n = 4$, niin murtoviivan pituus on $4\sqrt{2}R$. Yleisesti, jos $n > 2$, niin murtoviivassa esiintyvän yhden janan pituus l saadaan suorakulmaisten kolmioiden avulla yhtälöstä

$$l = 2R\sin\frac{2\pi}{2n} = 2R\sin\frac{\pi}{n}.$$

Murtoviivan Γ_n pituus l_{Γ_n} on täten

$$l_{\Gamma_n} = nl = n2R\sin\frac{\pi}{n} = (2R\pi)\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.$$

Kun $n \to \infty$, niin $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \to 1$, joten kehän pituus voidaan tulkita raja-arvoksi

$$\lim_{n\to\infty} l_{\Gamma_n} = 2\pi R.$$

Yleinen käyrän pituuden määritelmä perustuu Esimerkin 7.4.1 ideaan määritellä käyrän pituus approksimoivan murtoviivan pituuden ”raja-arvona”. Määritelmään (jota tässä ei esitetä) nojautuen voidaan todistaa:

Lause 7.4.2 Olkoon käyrän $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ parametriesitys $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a,b] \to \Gamma$, missä koordinaattifunktiot φ_i ovat jatkuvasti derivoituvia välillä $[a,b]$. Tällöin käyrän Γ pituus l_Γ saadaan yhtälöstä

$$l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\,dt = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt.$$

Todistus. Tarkastellaan todistuksen ideaa tapauksessa $n = 2$. Merkitään

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \varphi_1(t) \\ y(t) & = & \varphi_2(t) \end{array}$$

ja jaetaan parametriväli $[a, b]$ jakopistein $a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b$ osaväleihin $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Jos Γ^* on murtoviiva

$$\Gamma^* : \ (x(t_0), y(t_0)) \to \cdots \to (x(t_{n-1}), y(t_{n-1})) \to (x(t_n), y(t_n)),$$

niin murtoviivan pituus l_{Γ^*} on

$$l_{\Gamma^*} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee väliarvolauseen nojalla

$$\begin{array}{rcl} x(t_i) - x(t_{i-1}) & = & x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) & = & y'(\xi_i^*)(t_i - t_{i-1}), \end{array}$$

missä $\xi_i, \xi_i^* \in]t_{i-1}, t_i[$. Sijoittamalla nämä esitykset pituuden lausekkeeseen saadaan

$$l_{\Gamma^*} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i^*)^2}.$$

Huomaa: Jos tässä olisi $\xi_i = \xi_i^*$, niin l_{Γ^*} olisi funktion $t \to \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ Riemannin summa välillä $[a, b]$ ja osavälien tihentyessä ($n \to \infty$) raja-arvoksi saataisiin

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Ei tosin voida olettaa, että $\xi_i = \xi_i^*$, mutta huolellinen analyysi joka tapauksessa osoittaa, että raja-arvoksi saadaan kyseinen integraali, ks. esimerkiksi Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1, s. 274. $\square$

Esimerkki 7.4.3 (a) Tarkastellaan ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kehän pituutta Lauseen 7.4.2 avulla, kun $a > 0$ ja $b > 0$. Parametriesitys on muotoa

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & a \cos t \\ y(t) & = & b \sin t, \end{array}$$

missä $t \in [0, 2\pi]$. Koska

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t,$$

ellipsin kehän pituudeksi l saadaan Lauseen 7.4.2 mukaan

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Jos $a = b$ eli kyseessä on a-säteinen origokeskinen ympyrä, kehän pituudeksi saadaan

$$l = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a.$$

Jos sen sijaan $a \neq b$, pituuden antavaa integraalia ei kyetä laskemaan alkeisfunktioiden avulla suoraan. Kyseessä on klassinen *elliptiseen integraaliin* liittyvä ongelma, jonka ratkaisu voidaan esittää *elliptisten funktioiden* avulla. Likiarvoja kehän pituudelle saadaan helposti määrättyä *numeerisella integroinnilla*.

(b) Olkoon $\Gamma = \{\, (t, f(t)) \mid t \in [a, b] \,\}$, missä $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuvasti derivoituva. Lauseen 7.4.2 mukaan käyrän Γ pituus on

$$l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

Esimerkiksi, jos $f(x) = x^3$ välillä $[0, 1]$, niin kuvakäyrän pituudeksi saadaan

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4}\, dt.$$

Tätäkään ei osata integroida alkeisfunktioiden avulla. Jo Newton törmäsi kyseiseen ongelmatapaukseen. Huomaa, että neliöjuuresta johtuen käyrän pituutta määrättäessä helposti päädytään ongelmiin integroinnissa.

(c) Tasokäyrä Γ voidaan antaa myös napakoordinaatteina. Olkoon $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}_+$ funktio, joka antaa tason pisteen etäisyyden origosta suuntakulman φ funktiona. Esimerkiksi *kardioidi* on tasokäyrä

$$r(\varphi) = a(1 - \cos \varphi), \quad a > 0,$$

missä $\varphi \in [0, 2\pi]$. Napakoordinaattikäyrän $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ parametriesitys on muotoa

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \\ y &= y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi, \end{aligned}$$

missä $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Derivoimalla parametriesitys ja sijoittamalla Lauseen 7.4.2 kaavaan saadaan napakoordinaattikäyrän $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, pituudeksi l (harjoitustehtävä)

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Esimerkiksi kardioidin pituudeksi saadaan

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi} \\ &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\tfrac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a. \end{aligned}$$

Integrointi kaaren pituuden suhteen

Olkoon $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ säännöllinen kaari ja $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a, b] \to \Gamma$ kaaren Γ jatkuvasti derivoituva parametriesitys. Lauseen 7.4.2 mukaan kaaren Γ pituus on

$$l := \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt.$$

Edelleen kaikilla $t \in [a, b]$ osaväliä $[a, t]$ vastaava kaaren pituus $\lambda(t)$ on

$$\lambda(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(u)^2 + \varphi_2'(u)^2}\, du.$$

Voidaan osoittaa, että funktio $\lambda : [a, b] \to [0, l]$ on jatkuvasti derivoituva bijektio. Näin ollen kuvaus $\psi = (\psi_1, \psi_2) : [0, l] \to \Gamma$,

$$\psi(s) = (\varphi \circ \lambda^{-1})(s)$$

on kaaren Γ parametriesitys. Parametriesityksessä ψ parametrinä on siis (osa)kaaren pituus.

Olkoon $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin funktion f *integraali kaaren pituuden suhteen* määritellään integraalina

$$\int_\Gamma f\, ds := \int_0^l f(\psi(s))\, ds.$$

Suorittamalla muuttujan vaihto

$$s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(u)^2 + \varphi_2'(u)^2}\, du$$

saadaan $ds = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt$, joten

$$\int\limits_{\Gamma} f\, ds = \int\limits_0^l f(\psi(s))\, ds = \int_0^l f(\varphi(\lambda^{-1}(s)))\, ds = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt.$$

Esimerkki 7.4.4 (a) Olkoon $f \equiv c$ (c vakio) käyrällä Γ. Tällöin

$$\int_{\Gamma} f\, ds = \int_a^b f(\varphi(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt = \int_a^b c\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt = cl,$$

missä l on käyrän Γ pituus.

(b) Käyttäen integraalia kaaren pituuden suhteen saadaan tasokäyrän painopiste määrättyä. Yleisesti, jos kaarella Γ on massa, jonka tiheys on $\rho(x, y)$ (jatkuva ja ei-negatiivinen), niin painopisteen koordinaatit saadaan yhtälöistä

$$X = \frac{\int\limits_{\Gamma} x\rho(x, y)\, ds}{\int\limits_{\Gamma} \rho(x, y)\, ds} \quad \text{ja} \quad Y = \frac{\int\limits_{\Gamma} y\rho(x, y)\, ds}{\int\limits_{\Gamma} \rho(x, y)\, ds}.$$

Olkoon esimerkiksi $\rho \equiv \rho_0 > 0$ (vakio) ja Γ puoliympyrä

$$\Gamma = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0 \,\}.$$

Tällöin parametriesitys on

$$\begin{cases} \varphi_1(t) &= \cos t \\ \varphi_2(t) &= \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]\,,$$

joten (kohta (a)) $\int\limits_{\Gamma} \rho(x, y)\, ds = \rho_0 \pi$ ja

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} x\rho(x, y)\, ds &= \int\limits_0^{\pi} \rho_0 \cos t\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt = \int\limits_0^{\pi} \rho_0 \cos t\, dt = 0, \\ \int\limits_{\Gamma} y\rho(x, y)\, ds &= \int\limits_0^{\pi} \rho_0 \sin t\, dt = 2\rho_0. \end{aligned}$$

Siis painopisteen koordinaatit ovat

$$X = \frac{0}{\pi\rho_0} = 0 \quad \text{ja} \quad Y = \frac{2\rho_0}{\pi\rho_0} = \frac{2}{\pi}.$$

Huomaa, että painopiste ei ole käyrällä. Jos tiheys ρ on vakio, niin painopisteen kautta kulkevat koordinaattiakseleiden suuntaiset suorat jakavat käyrän yhtä pitkiin osiin kummassakin suunnassa. Sovellutuksissa esimerkiksi käyrällä voidaan kuvata metallivaijeria, jolloin tiheys ρ voidaan olettaa vakioksi.

Geometrinen tulkinta Jos f on jatkuva ja ei-negatiivinen käyrällä Γ, niin integraali

$$\int_\Gamma f\,ds$$

antaa funktion f kuvaajan ja (x,y)-tasossa olevan käyrän Γ väliin jäävän pinnan pinta-alan.

Esimerkki 7.4.5 Määrätään vaipan ala lieriölle, jonka korkeus on $h > 0$ ja pohjaympyrän säde on $R > 0$. Jos vaipan alaan ei lasketa mukaan pohjaympyröiden pinta-aloja, niin eo. geometrisen tulkinnan nojalla vaipan ala on

$$\int\limits_\Gamma f\,ds,$$

missä $\Gamma = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = R^2\,\}$ ja $f(x,y) \equiv h$. Parametriesitys on

$$\begin{cases} \varphi_1(t) &= R\cos t \\ \varphi_2(t) &= R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

joten määritelmän mukaisesti

$$\int\limits_\Gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} hR\,dt = 2\pi Rh.$$

Huomautus Integrointi kaaren pituuden suhteen esiintyy myös mm. hyperbolisen etäisyyden määritelmässä kompleksinalyysissä.

8 Pintaintegraalit

8.1 Pintaintegraali yli suorakulmion

Olkoon $R \subset \mathbf{R}^2$ suljettu suorakulmio

$$[a,b] \times [c,d] = \{\,(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\,\},$$

missä $a < b$ ja $c < d$. Jaetaan R äärelliseen moneen suljettuun osasuorakulmioon $R_1, \ldots, R_n$ x- ja y-akselien suuntaisilla suorilla (Thomas: Calculus, s. 975). Olkoon $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$ osasuorakulmion R_k pinta-ala, jolloin Δx_k ja Δy_k ovat osasuorakulmion sivujen pituudet. Siis

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = (b-a)(d-c).$$

Olkoon $f : R \to \mathbf{R}$ funktio. Valitaan mielivaltaiset pisteet $(x_k, y_k) \in R_k$ ja muodostetaan summa

$$S_n(f, x_k, y_k) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k.$$

Summa $S_n(f, x_k, y_k)$ riippuu siis osasuorakulmioiden ja pisteiden $(x_k, y_k) \in R_k$ valinnasta. Jos f on jatkuva ja positiivinen, summa $S_n(f, x_k, y_k)$ approksimoi pinnan $z = f(x, y)$ ja tason $z = 0$ väliin suorakulmiossa R jäävää tilavuutta. Summaa $S_n(f, x_k, y_k)$ kutsutaan *pisteisiin* (x_k, y_k) *liittyväksi funktion* f *Riemannin summaksi.*

Määritelmä 8.1.1 Jos reaalilukujonolla $(S_n(f, x_k, y_k))_{n\in\mathbf{N}}$ on äärellinen raja-arvo, kun

$$\max\{\,\Delta x_1, \ldots \Delta x_n, \Delta y_1, \ldots \Delta y_n\,\}) \to 0,$$

ja tämä raja-arvo on riippumaton sekä osasuorakulmioiden että pisteiden $(x_k, y_k) \in R_k$ valinnasta, niin sanotaan että f on *integroituva joukossa* R. Kyseistä raja-arvoa kutsutaan *funktion* f *pintaintegraaliksi yli suorakulmion* R ja sille käytetään merkintöjä

$$\int_R f, \quad \iint_R f(x, y)\,dxdy, \quad \int_a^b\!\!\int_c^d f(x, y)\,dxdy.$$

Huomautus 8.1.2 Voidaan osoittaa, että jos $f : R \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin pintaintegraali $\int_R f$ on olemassa. Tämän perusteleminen ei ole tässä yhteydessä tarkoituksenmukaista. Jatkuvuus ei kuitenkaan ole välttämätön ehto integroituvuudelle, esimerkiksi epäjatkuvuus äärellisen monessa pisteessä ei estä integroituvuutta, jos funktio on rajoitettu.

Esimerkki 8.1.3 Määritellään $f : R \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in R \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) \\ 1, & (x, y) \in R \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) \end{cases}$$

Olkoon $R_1, \ldots, R_n$ mielivaltainen R:n jako osasuorakulmioihin. Tällöin voidaan valita $(x_k, y_k) \in R_k \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$, jolloin pisteisiin (x_k, y_k) liittyväksi Riemannin summaksi saadaan

$$S_n(f, x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta A_k = 0.$$

Toisaalta löydetään pisteet $(x_k^*, y_k^*) \in R_k \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$, jolloin pisteisiin (x_k^*, y_k^*) liittyvä Riemannin summa on

$$S_n(f, x_k^*, y_k^*) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta A_k = (b-a)(d-c) > 0.$$

Havaitaan, että funktio f ei toteuta Määritelmää 8.1.1. Siis f ei ole integroituva suorakulmiossa R. Mainittakoon, että f on kuitenkin ns. Lebesgue-integroituva (käsitettä tarkastellaan kurssilla Analyysi IV).

Pinta-integraalin geometrinen tulkinta Jos f on ei-negatiivinen funktio suorakulmiossa R, pinta-integraali $\int\limits_R f$ antaa pinnan $z = f(x, y)$ ja tason $z = 0$ väliin suorakulmiossa R jäävän tilavuuden. Jos f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, pinta-integraali laskee tason $z = 0$ alapuolella olevan osan tilavuuden negatiivisena.

Käytännössä pinta-integraali lasketaan usein *kaksinkertaisena integraalina*:

Lause 8.1.4 Olkoon f integroituva suorakulmiossa $R = [a, b] \times [c, d]$. Tällöin

$$\int\limits_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Esimerkki 8.1.5 (a) Olkoon $f(x, y) = 4 - x - y$ ja $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Lauseen 8.1.4 mukaan

$$\begin{aligned} \textstyle\int_R f &= \textstyle\int_0^2 \left(\int_0^1 (4 - x - y)\, dy \right) dx \\ &= \textstyle\int_0^2 \left(\Big/_0^1 (4y - yx - \frac{1}{2}y^2) \right) dx \\ &= \textstyle\int_0^2 (\frac{7}{2} - x)\, dx = \Big/_0^2 (\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2) = 5. \end{aligned}$$

Toisin päin integroituna

$$\begin{aligned} \textstyle\int_R f &= \textstyle\int_0^1 \left(\int_0^2 (4 - x - y)\, dx \right) dy \\ &= \textstyle\int_0^1 \left(\Big/_0^2 (4x - \frac{1}{2}x^2 - yx)\, dx \right) dy \\ &= \textstyle\int_0^1 (6 - 2y)\, dy = \Big/_0^1 (6y - y^2) = 5. \end{aligned}$$

Tarkastellaan laskun ideaa geometrisesti (ks. kuva). Olkoon K kolmiulotteinen monitahokas

$$K = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x - y \,\}.$$

Tällöin

$$A(x) := \int_0^1 (4 - x - y)\, dy, \quad 0 \le x \le 2,$$

antaa kappaleen K leikkauspinnan alan leikattaessa kohtisuoraan x-akseliin nähden. Edelleen

$$\int_0^2 A(x)\, dx$$

antaa kappaleen K tilavuuden. Tämän havaitsemiseksi jaetaan väli $[0, 2]$ n:ään yhtä pitkään osaväliin, joiden yhteinen pituus on $\frac{2}{n}$. Jos x_i, $i = 1, \ldots, n$, ovat esimerkiksi osavälien keskipisteet, niin summa

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \frac{2}{n}$$

approksimoi K:n tilavuutta ja (yksiulotteisen) Riemannin integraalin määritelmän mukaan

$$\int_0^2 A(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \frac{2}{n}.$$

Vastaavasti

$$A(y) := \int_0^2 (4 - x - y)\, dx, \quad 0 \le y \le 1,$$

antaa kappaleen K leikkauspinnan alan leikattaessa kohtisuoraan y-akseliin nähden. Kuten edellä,

$$\int_0^1 A(y)\, dy$$

antaa kappaleen K tilavuuden. Edellä esitetty päättely on myös yleisesti Lauseen 8.1.4 todistuksen idea.

(b) Integroimisjärjestyksellä voi olla suurestikin merkitystä pinta-integraalin laskemisen kannalta (ainakin käsin laskettaessa). Olkoon

$$R = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi \,\}.$$

Lauseen 8.1.4 mukaan

$$\begin{aligned} \iint_R y \cos xy \, dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 y \cos xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^\pi \left(\Big/_0^1 \sin xy \right) dy = \int_0^\pi \sin y \, dy = \Big/_0^\pi (-\cos y) = 2. \end{aligned}$$

Toisessa järjestyksessä integroituna joutuu soveltamaan kahteen otteeseen osittaisintegrointia.

8.2 Pinta-integraali yli yleisen alueen

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu ja olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ funktio. Laajennetaan f koko tasoon $\mathbf{R}^2$ määrittelemällä *nollajatko* f_A funktiona

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus A. \end{cases}$$

Valitaan suljettu suorakulmio R siten, että $A \subset R$. Funktion f *pinta-integraali yli joukon* A määritellään asettamalla

$$\int_A f := \int_R f_A,$$

jos oikeanpuoleinen integraali on olemassa. Voidaan osoittaa, että määritelmä ei riipu apusuorakulmion R valinnasta.

Huomautus 8.2.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$. Joukon A *karakteristinen funktio* määritellään asettamalla

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus A. \end{cases}$$

Rajoitettua joukkoa $A \subset \mathbf{R}^2$ sanotaan *mitalliseksi*, jos χ_A on integroituva joukossa A. Tällöin integraalia

$$m(A) := \int_A \chi_A$$

kutsutaan joukon A pinta-alaksi $m(A)$. Jos $m(A) = 0$, joukkoa $A \subset \mathbf{R}^2$ sanotaan *nollamittaiseksi*.

Integroitaessa tyypillinen tilanne on se, että integroidaan funktiota joka on jatkuva nollamittaisen joukon ulkopuolella. Tällöin tarvitaan tietoa siitä, minkälaiset joukot ovat nollamittaisia. Voidaan esimerkiksi osoittaa, että säännöllisten kaarien äärelliset yhdisteet ovat aina nollamittaisia. Tällainen tilanne esiintyy seuraavassa lauseessa, joka yleistää Lauseen 8.1.4 kaksoisintegraalin idean.

Lause 8.2.2 Olkoot $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuvia siten, että $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Jos funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva alueessa

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

niin

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Vastaavasti, jos

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

missä $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia siten, että $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ kaikilla $y \in [c,d]$, ja jos $f : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Huomautus Lauseen 8.2.2 intuitiivinen perustelu on esitetty Esimerkissä 8.1.5 (a).

Esimerkki 8.2.3 (a) Lasketaan

$$\iint_A xy\,dxdy,$$

kun $A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \le y \le \sqrt{x} \,\}$. Koska $x \le y \le \sqrt{x}$ jos ja vain jos $0 \le x \le 1$, niin Lauseen 8.2.2 mukaan

$$\begin{aligned} \iint_A xy\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\Big/_{x}^{\sqrt{x}} \frac{xy^2}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

(b) Kuinka integraali

$$I = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy \right) dx$$

lasketaan käännetyssä integroimisjärjestyksessä? Nyt integroimisjoukko A on muotoa

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x \,\}.$$

Jos joukkoa A lähestytään vasemmalta pitkin x-akselin suuntaista suoraa L välillä $0 \le y \le 4$, niin L leikkaa A:n ensin suoralla $y = 2x$ eli arvolla $x = \frac{y}{2}$ ja jättää A:n käyrällä $y = x^2$ eli arvolla $x = \sqrt{y}$. Siis integroimisjoukko voidaan esittää myös muodossa

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4,\ \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\,\}$$

eli I saadaan integraalina

$$I = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx \right) dy.$$

Todistetaan, että pinta-integrointi on lineaarinen operaatio:

Lause 8.2.4 Jos funktiot f ja g ovat integroituvia joukossa $A \subset \mathbf{R}^2$ ja $a \in \mathbf{R}$, niin

(a) funktio $\overline{x} \to af(\overline{x})$ on integroituva joukossa A ja

$$\int\limits_A (af) = a \int\limits_A f,$$

(b) funktio $\overline{x} \to f(\overline{x}) + g(\overline{x})$ on integroituva joukossa A ja

$$\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g.$$

Todistus. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $A = R$ on suorakulmio. Yleinen tapaus todetaan aivan samalla tavalla nollajatkoja käyttäen. Jos $R_1, \ldots, R_n$ on suorakulmion R jako osasuorakulmioihin ja $(x_k, y_k) \in R_k$, niin

$$S_n(af, x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{n} af(x_k, y_k)\Delta A_k = a\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) = aS_n(f, x_k, y_k).$$

Jos pisimmän osavälin pituus menee kohti nollaa, niin $n \to \infty$, ja jonon raja-arvon vakiolla kertomista koskevan ominaisuuden nojalla

$$\lim_{n\to\infty} S_n(af, x_k, y_k) = \lim_{n\to\infty} aS_n(f, x_k, y_k) = a \lim_{n\to\infty} S_n(f, x_k, y_k) = a \int\limits_R f.$$

Siis (a) pätee. Vastaavasti

$$\begin{aligned} S_n(f+g, x_k, y_k) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (f(x_k, y_k) + g(x_k, y_k))\Delta A_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k + \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k) \\ &= S_n(f, x_k, y_k) + S_n(g, x_k, y_k). \end{aligned}$$

Jos pisimmän osavälin pituus menee kohti nollaa, niin $n \to \infty$, ja jonon raja-arvon summaa koskevan ominaisuuden nojalla

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f+g, x_k, y_k) = \lim_{n\to\infty} S_n(f, x_k, y_k) + \lim_{n\to\infty} S_n(g, x_k, y_k)) = \int_R f + \int_R g.$$

Siis myös (b) pätee. $\square$

Induktion avulla tulos saadaan helposti yleistettyä muotoon:

Seuraus 8.2.5 Oletetaan, että funktiot $f_1, \dots, f_m$ ovat integroituvia joukossa $A \subset \mathbf{R}^2$ ja olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$$

on integroituva joukossa A ja

$$\int_A (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m) = \lambda_1 \int_A f_1 + \cdots + \lambda_m \int_A f_m.$$

8.3 Greenin kaava

Tarkastellaan seuraavaksi *Greenin kaavaa*, joka antaa pinta- ja käyräintegraalien välisen yhteyden. Tätä varten määritellään joukon A *reuna* ∂A niiden pisteiden $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$ joukkona, joille

$$B(\overline{x}, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad B(\overline{x}, r) \cap (\mathbf{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$$

kaikille säteille $r > 0$. Siis mielivaltaisen lähellä reunan ∂A pistettä on aina sekä A:n että $\mathbf{R}^2 \setminus A$:n pisteitä.

Esimerkki Jos $A = B(\overline{y}, R) \subset \mathbf{R}^2$, niin

$$\partial A = \partial B(\overline{y}, R) = \{\, \overline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid |\overline{x} - \overline{y}| = R \,\}.$$

Yleisesti, jos A on paloittain säännöllisen umpinaisen käyrän sisään jäävä tasoalue, niin reuna ∂A on rajoittavien käyrien yhdiste.

Olkoon

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \,\}, \tag{1}$$

missä $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $\phi_1(a) \le \phi_2(a)$, $\phi_1(b) \le \phi_2(b)$ ja $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$. Olkoon edelleen f eräässä A:n sisältävässä avoimessa joukossa jatkuvasti derivoituva funktio. Tällöin Lauseen 8.2.2 mukaan

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_A D_2 f &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} D_2 f(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\Big/_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b [f(x,\phi_2(x)) - f(x,\phi_1(x))]\,dx \\
&= \textstyle\int_a^b f(x,\phi_2(x))\,dx - \int_a^b f(x,\phi_1(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Joukon A reuna ∂A voidaan esittää yhdisteenä

$$\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

missä kaarien Γ_i parametriesitykset ovat

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : (x,y) &= (t,\phi_1(t)), \quad t \in [a,b], \\
\Gamma_2 : (x,y) &= (b,t), \quad t \in [\phi_1(b),\phi_2(b)], \\
\Gamma_3 : (x,y) &= (t,\phi_2(t)), \quad t \in [b,a], \\
\Gamma_4 : (x,y) &= (a,t), \quad t \in [\phi_2(a),\phi_1(a)]
\end{aligned}$$

(pidetään tässä tunnettuna, että käyräintegraalin määritelmä toimii vaikka parametriväli on suuremmasta pienempään). Lasketaan vektorikentän $(f,0)$ käyräintegraali yli reunan ∂A positiiviseen suuntaan. Saadaan

$$\int_{\partial A} f\,dx + 0\,dy = \int_{\partial A} f\,dx = \int_{\Gamma_1} f\,dx + \int_{\Gamma_2} f\,dx + \int_{\Gamma_3} f\,dx + \int_{\Gamma_4} f\,dx.$$

Selvästi

$$\int_{\Gamma_2} f\,dx = 0 = \int_{\Gamma_4} f\,dx,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} f\,dx &= \int_{\Gamma_1} f\,dx + \int_{\Gamma_3} f\,dx = \textstyle\int_a^b f(t,\phi_1(t))\,dt + \int_b^a f(t,\phi_2(t))\,dt \\
&= \textstyle\int_a^b f(t,\phi_1(t))\,dt - \int_a^b f(t,\phi_2(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä tulokset todetaan, että

$$\int_A D_2 f = -\int_{\partial A} f\,dx. \tag{2}$$

Oletetaan vastaavasti, että A voidaan esittää muodossa

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \,\}, \tag{3}$$

missä $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $\psi_1(c) \le \psi_2(c)$, $\psi_1(d) \le \psi_2(d)$ ja $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ kaikilla $y \in]c, d[$. Samalla tavoin kuin edellä todetaan, että (harjoitustehtävä)

$$\int_A D_1 f = \int_{\partial A} f\, dy \tag{4}$$

aina kun f on A:n sisältävässä avoimessa joukossa jatkuvasti derivoituva funktio. Miksi kaavassa (2) on miinusmerkki, mutta kaavassa (4) ei? Luonnollinen selitys tälle on se, että x-koordinaatit kasvavat positiiviseen suuntaan kun taas y-koordinaatit kasvavat negatiiviseen suuntaan. Yhdistämällä kaavat (2) ja (4) saadaan todistettua Greenin kaava tarkasteltavassa tapauksessa:

Lause 8.3.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ joukko, joka voidaan esittää sekä muodossa (1) että muodossa (3). Olkoon $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä avoimessa joukossa U, joka sisältää joukon A. Tällöin

$$\int_A (D_1 f_2 - D_2 f_1) = \int_{\partial A} f_1 dx + f_2\, dy,$$

kun käyräintegraali lasketaan positiiviseen suuntaan.

Todistus. Vektorikenttä $f = (f_1, f_2)$ voidaan esittää summana $(f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$, joten käyrä- ja pintaintegraalien lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} f_1 dx + f_2\, dy &= \int_{\partial A} f_1 dx + \int_{\partial A} f_2\, dy \\ &= -\int_A D_2 f_1 + \int_A D_1 f_2 \\ &= \int_A (D_1 f_2 - D_2 f_1). \end{aligned}$$

Huomaa, että käyräintegraalin lineaarisuus on selvä määritelmän nojalla, koska tavallinen Riemannin integraali on lineaarinen. □

Huomautus 8.3.2 (a) Greenin kaava pätee yleisemmin, jos A on paloittain säännöllisen umpinaisen käyrän sisään jäävä alue.

(b) Greenin kaava täydentää luvun 7.3 potentiaalitarkasteluja. Esimerkiksi se kertoo, että tasossa $\mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituvan vektorikentän $f = (f_1, f_2)$ käyräintegraali yli pallon reunan ∂B on nolla jos ja vain jos integroimisehto $D_1 f_2 = D_2 f_1$ pätee pallon sisällä. Tämä puolestaan on ekvivalenttia sen kanssa, että vektorikentällä f on potentiaali (Lause 7.3.6).

Greenin kaavaa voidaan hyödyntää monella tavalla. Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä pinta-alan laskemista tapauksessa, jossa tavallinen Riemannin integrointi johtaa vaikeuksiin.

Esimerkki 8.3.3 Lasketaan ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rajoittama alueen A pinta-ala $m(A)$. Jos valitaan $f_2(x,y) = x$ ja $f_1(x,y) = 0$, Greenin kaavasta saadaan

$$\int\limits_{\partial A} x\,dy = \int\limits_{A} 1 = m(A).$$

Tarkasteltavan ellipsin parametriesitys on

$$\begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

joten kaksinkertaisen kosinin kaavan nojalla

$$\begin{aligned} m(A) &= \int\limits_{\partial A} x\,dy = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t)\,dt \\ &= ab\Big/_0^{2\pi} (\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t) = \pi ab. \end{aligned}$$

Greenin kaava on usein käyttökelpoinen käyräintegraaleja laskettaessa myös tapauksessa jossa integroituvuusehto ei päde (potentiaalia ei ole olemassa).

Esimerkki 8.3.4 (a) Olkoon $A = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le \delta^2\,\}$, $\delta > 0$. Lasketaan

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy$$

positiiviseen suuntaan. Nyt $f_1(x,y) = 2y$ ja $f_2(x,y) = -3x$, joten $D_2 f_1(x,y) = 2$ ja $D_1 f_2(x,y) = -3$. Siis vektorikentällä ei ole potentiaalia. Greenin kaavan ja Lauseen 8.2.4 mukaan

$$\int\limits_{\partial A} f_1 dx + f_2\,dy = \int\limits_{A} (D_1 f_2 - D_2 f_1) = \int\limits_{A} (-5) = -5m(A) = -5\pi\delta^2.$$

(b) Lasketaan

$$\int_\Gamma 2y\,dx - 3x\,dy,$$

kun Γ on murtoviiva $(1,0) \to (1,1) \to (0,1) \to (0,0)$. Jos A on neliö, jonka kärkipisteet ovat $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ja $(1,0)$, niin kohdan (a) tapaan päätellään, että positiiviseen suuntaan integroituna

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy = -5m(A) = -5.$$

Toisaalta, jos Γ_1 on jana $(0,0) \to (1,0)$, niin Γ_1:n parametriesitys on $(t,0)$, $t \in [0,1]$, ja siis

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy = \int_0^1 (2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot t \cdot 0)\,dt = 0.$$

Koska

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy = \int_{\Gamma_1} 2y\,dx - 3x\,dy + \int_{\Gamma} 2y\,dx - 3x\,dy,$$

saadaan

$$\int_{\Gamma} 2y\,dx - 3x\,dy = -5.$$

8.4 Muuttujan vaihto pintaintegraalissa

Jos A on ympyrä, pintaintegraalin $\int_A f$ laskeminen Lauseen 8.2.2 tavalla on erittäin hankalaa.

Esimerkki Yksinkertaisimpia tapauksia on

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\bar{0},R)} 1 &= \int\limits_{-R}^{R} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx \\ &= \int\limits_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx,\end{aligned}$$

mutta kuinka viimeksi mainittu integroidaan? (Kokeile, mitä MAPLE antaa vastaukseksi.)

Pinta-integrointi yli ympyrän suoritetaankin yleensä napakoordinaattien avulla käyttäen seuraavaa muuttujanvaihtotulosta (ks. esim. Lehto: Differentiaali- ja integraalilaskenta II):

Lause 8.4.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, $m(\partial A) = 0$, ja olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva. Olkoon edelleen $g : R \to A$ jatkuvasti derivoituva bijektio, missä $R \subset \mathbf{R}^2$ on suorakulmio. Tällöin

$$\int\limits_A f = \int\limits_R (f \circ g) \cdot |\,\mathcal{J}_g\,|,$$

missä $\mathcal{J}_g$ on kuvauksen g *Jacobin determinantti*,

$$\mathcal{J}_g(\overline{x}) = \begin{vmatrix} D_1 g_1(\overline{x}) & D_2 g_1(\overline{x}) \\ D_2 g_2(\overline{x}) & D_2 g_2(\overline{x}) \end{vmatrix}$$

kaikilla $\overline{x} \in R$.

Nollamittaisista joukoista Tässä esityksessä ei ole mahdollista perehtyä siihen, minkälaiset joukot ovat nollamittaisia. Pidetään sen vuoksi tunnettuna, että paloittain säännöllinen käyrä on nollamittainen. Toisaalta voidaan helposti todistaa, että nollamittaisen joukon osajoukko on aina nollamittainen. Erityisesti äärellinen pistejoukko ja jana on aina nollamittainen.

Lauseen 8.4.1 oletuksia voidaan lieventää. Esimerkiksi napakoordinaattimuunnoksessa tarvitsemme seuraavaa tietoa:

Huomautus 8.4.2 Lause 8.4.1 pätee, jos g:n bijektiivisyyden sijaan oletetaan jompi kumpi kohdista (a) tai (b):

(a) $g : R \to A$ on injektio ja $m(A \setminus g(R)) = 0$,

(b) $g : R \to A$ on surjektio ja ne A:n pisteet, joilla on enemmän kuin yksi alkukuva, muodostavat nollamittaisen joukon.

Kuvauksen g määrittelyjoukon ei myöskään tarvitse olla suorakulmio.

Esimerkki 8.4.3 Olkoon A δ-säteinen ympyrä

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \delta^2 \,\}.$$

Tarkastellaan kuvausta $g : [0, \delta] \times [0, 2\pi] \to A$,

$$g(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Kuvaus g on surjektio ja ne pisteet, joilla on useampi kuin yksi alkukuva, muodostavat janan origosta pisteeseen $(\delta, 0)$. Huomautuksen 8.4.2 (b) mukaan Lausetta 8.4.1 voidaan soveltaa. Tätä varten lasketaan $\mathcal{J}_g$. Saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_g(r,\varphi) &= D_1 g_1(r,\varphi) D_2 g_2(r,\varphi) - D_2 g_1(r,\varphi) D_1 g_2(r,\varphi) \\ &= \cos\varphi(r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\sin\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r. \end{aligned}$$

Siis, jos f on jatkuva pallossa A, niin

$$\int_A f = \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \, d\varphi \right) dr. \tag{5}$$

Esimerkiksi tapauksessa $f \equiv 1$

$$m(A) = \int_A 1 = \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) \, dr = \int_0^\delta 2\pi r \, dr = \pi \delta^2.$$

Jos taas $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, niin

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \, d\varphi \right) \, dr \\ &= \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} r e^{r^2} \, d\varphi \right) \, dr \\ &= \int_0^\delta 2\pi r e^{r^2} \, dr = \pi \Big/_0^\delta e^{r^2} = \pi(e^{\delta^2} - 1). \end{aligned}$$

Yleisesti, pintaintegraali yli origokeskisen pallon on usein helposti laskettavissa kaavalla (5) jos f on radiaalinen funktio eli f riippuu ainoastaan pisteen (x, y) normista $\sqrt{x^2 + y^2}$.