Analyysi II
Harjoitus 1/2004

1. Olkoot $\overline{x} = (2, -2)$ ja $\overline{y} = (1, 4)$. Laske $|\overline{x} + \overline{y}|$ ja $|\overline{x}| + |\overline{y}|$.

2. Määrää

(a) vektorin $\overline{x} = (2, -4, -3)$ suuntainen yksikkövektori,

(b) vektorien $\overline{x} = (2, -4, -3)$ ja $\overline{y} = (-1, 4, 3)$ välisen kulman likiarvo.

3. Etsi ne yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\overline{x} = (1, 3)$ vastaan.

4. Osoita, että

$$|\overline{x}| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

kaikille avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreille $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

5. Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$. Osoita, että kaikilla $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{R}^n$ pätee

$$\overline{x} \cdot (a\overline{y} + b\overline{z}) = a\overline{x} \cdot \overline{y} + b\overline{x} \cdot \overline{z}.$$

6. Olkoot $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$. Todista kosinilauseen

$$|\overline{x} - \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2 - 2|\overline{x}||\overline{y}| \cos(\overline{x}, \overline{y})$$

avulla, että

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}||\overline{y}| \cos(\overline{x}, \overline{y}),$$

kun $(\overline{x}, \overline{y})$ on vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ välinen kulma.

7. Osoita, että

$$||\overline{x}| - |\overline{y}|| \leq |\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$$

kaikilla $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^n$. (Vihje! Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$-2|\overline{x}||\overline{y}| \leq 2(\overline{x} \cdot \overline{y}) \leq 2|\overline{x}||\overline{y}|.$$

Lisää epäyhtälöihin puolittain $|\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2$.)