

Analyysi II

Harjoitus 11/2004

1. Tutki, onko vektorikentällä $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ potentiaalia, kun

(a) $f(x) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$,

(b) $f(x) = (e^{-x} \sin y, e^{-x} \cos y)$,

(c) $f(x) = (x^2 - y^2, xy + x^2)$.

2. Toteuttaako vektorikenttä

(a) $f(x, y, z) = (yz, xy, z)$,

(b) $f(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$,

ehdon $\nabla \times f = \bar{0}$ joukossa \mathbf{R}^3 ?

3. Määrä vakion variointimetodilla potentiaali ja laske potentiaalin avulla käyräintegraali

(a) $\int_{\Gamma} 6x \, dx + 6y^2 \, dy$, kun Γ on murtoviiva pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(2, 3)$,

(b) $\int_{\Gamma} (ye^x - e^y) \, dx + (e^x - xe^y + 3y^2) \, dy$ pitkin käyrää $y = x^2$ pisteestä $(1, 1)$ pisteeseen $(0, 0)$.

4. Määrä käyräintegraali

$$\int_{\Gamma} e^x(x^2 + y^2 + 2x) \, dx + 2ye^x \, dy,$$

kun Γ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kaari pisteestä $(0, -1)$ pisteeseen $(0, 1)$. (Vihje! Potentiaalin lauseketta ei tarvitse tuntea.)

5. Laske käyräintegraalin määritelmästä

$$u(x, y) := \int_{\Gamma} (3x^2 + 2xy + y^2) \, dx + (x^2 + 2xy + 3y^2) \, dy,$$

kun $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on mielivaltainen ja Γ on murtoviiva $(0, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$.

6. Laske käyräintegraalin määritelmästä

$$u(x, y, z) := \int_{\Gamma} (y^2 - z) \, dx + 2xy \, dy + (3z^2 - x) \, dz,$$

kun $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ on mielivaltainen ja Γ on murtoviiva $(0, 0, 0) \rightarrow (x, 0, 0) \rightarrow (x, y, 0) \rightarrow (x, y, z)$.

Vihje! Tehtävissä 5 ja 6 on kätevä käyttää Esimerkin 7.3.10 parametriesityksiä.