

Analyysi II
Harjoitus 13/2004

1. Laske

$$\iint_A x^3 dx dy,$$

kun A on suorien $x = 0$, $x + y = 1$ ja $x = y + 2$ rajoittama kolmio.

2. Olkoon A paraabelin $y = 2 - x^2$ ja suoran $x = y$ rajoittama tasoalue. Laske kolmiulotteisen kappaleen $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in A, -1 \leq z \leq 1\}$ tilavuus.

3. Muunna integroimisjärjestys integraalissa

$$\int_0^1 \left(\int_2^{4-2x} f(x, y) dy \right) dx.$$

4. Muunna integroimisjärjestys integraalissa

$$\int_0^2 \left(\int_0^{e^{3+y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

(Vihje! Esitä integraali additiivisuutta käyttäen kahden integraalin summana.)

5. Olkoon A suljettu neliö, jonka kärjet ovat $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ja $(0, -1)$. Laske integraali

$$\iint_A x dx dy.$$

6. Pidetään tunnettuna, että jokainen suljettu jana on nollamittainen (tämä todistettiin luento-esimerkissä 8.2.4 yksikköjanelle ja todistus on yleisesti olennaisesti sama). Perustele luennoissa esitettyjä lauseita käyttäen miksi jokainen äärellinen suljettu murtoviiva on nollamittainen.

7. Olkoon $R \subset \mathbf{R}^2$ suorakulmio ja olkoot $\phi, \psi : R \rightarrow \mathbf{R}$ kaksi suorakulmion R annettuun jakoon liittyvää porraskäyräfunktiota. Osoita, että porraskäyräfunktioiden integraaleille pätee seuraavat lineaarisuusominaisuudet:

(a) $\int_R (\alpha \phi) = \alpha \int_R \phi$ kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$,

(b) $\int_R (\phi + \psi) = \int_R \phi + \int_R \psi$.