Analyysi II
Harjoitus 14/2004

1. Määrää joukon $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ reuna ∂E, kun $\mathbf{Q}$ on rationaalilukujen joukko. Perustele väitteesi.

2. Olkoon
$$A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \,\},$$
missä $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $\psi_1(c) \le \psi_2(c)$, $\psi_1(d) \le \psi_2(d)$ ja $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ kaikilla $y \in]c, d[$. Olkoon f jatkuvasti derivoituva joukon A sisältävässä avoimessa joukossa. Osoita, että
$$\int\limits_A D_1 f = \int_c^d f(\psi_2(y), y)\, dy - \int_c^d f(\psi_1(y), y)\, dy.$$

3. Laske käyräintegraali
$$\int\limits_{\partial A} (x^4 - 3y)\, dx + (2y^3 + 4x)\, dy$$
Greenin kaavan avulla, kun $A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2 \,\}$.

4. Tarkastellaan asteroidin $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, rajoittaman alueen A pinta-alaa $m(A)$ Greenin kaavan avulla (kuva kääntöpuolella). Esitä luku
$$a := \int\limits_{\partial A} -y\, dx + x\, dy$$
tavallisena Riemannin integraalina ja selvitä, miten luvun a avulla saadaan selville pinta-ala $m(A)$. (Huom! Tehtävää voi merkitä vaikkei osaisikaan suorittaa lopullista integrointia).

5. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ kuvaus $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$. Määrää Jacobin determinantti $J_f(x, y)$, kun $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

6. Olkoon $f(x, y) = (x^3, y)$ ja olkoon R neliö, jonka keskipiste on $(1, 1)$ ja sivun pituus on 1. Määrää $m(f(R))$.

7. Olkoon $A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \,\}$. Laske pintaintegraali
$$\int_A f$$
napakoordinaattimuunnoksen avulla, kun $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$.

Huom! Oletko kadottanut taskulaskimesi Analyysi II:n luennolla tai demoissa? Jos olet, käy hakemassa laskimesi luennoitsijalta (M376).