Analyysi II
Harjoitus 2/2004

1. Määrää $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k$, kun $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k})$, missä

$$x_{1k} = \frac{3k^3 + 2k + 4}{4k^4 + k} \quad \text{ja} \quad x_{2k} = e^{\frac{k^2+2}{2k^2}}.$$

2. Määrää $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k$, kun

$$\overline{x}_k = \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k}, (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

3. Todista Lemman 1.1.2 ja Lauseen 1.1.3 avulla: Jos $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$ ja $\lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{y}$, niin

$$\lim_{k\to\infty} (\overline{x}_k + \overline{y}_k) = \overline{x} + \overline{y}.$$

4. Tutki, onko joukko $A \subset \mathbf{R}^2$ avoin tai suljettu, kun $A = \cap_{i\in\mathbf{N}} B(\overline{x}, \frac{1}{i})$, missä $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$.

5. Olkoot $U_1 \subset \mathbf{R}^2$ ja $U_2 \subset \mathbf{R}^2$ epätyhjiä avoimia joukkoja. Osoita määritelmään nojaten, että $U_1 \cup U_2$ on avoin. (Huom! Itseasiassa yhtä hyvin voidaan todistaa, että avointen joukkojen mielivaltainen yhdiste on avoin joukko.)

6. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ kuvaus

$$f(\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{|\overline{x}|^2}.$$

Määrää pisteiden $(1, -2)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ja $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ kuvapisteet.

7. Osoita, että Tehtävän 6 kuvaus f toteuttaa ehdon

$$(f \circ f)(\overline{x}) = \overline{x}$$

kaikilla $x \neq \overline{0}$. Määrää edelleen kuvauksen f kiintopisteet eli ne pisteet $\overline{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$, joille pätee $f(\overline{x}) = \overline{x}$. (Huom! Kuvaus f eli *peilaus yksikköympyrän suhteen* on keskeinen esimerkki tason Möbius-kuvauksesta).