Analyysi II
Harjoitus 3/2004

1. Esitä funktio

$$f(x,y) = \frac{x^3 - x^2y^2}{x^2+y^2}$$

napakoordinaattien r ja φ avulla muodossa $f(r,\varphi)$. Määrää edelleen ne vaihekulman φ arvot, joille $f(r,\varphi)=0$.

2. Oletetaan, että funktiolle $f : B(\overline{0},r)\setminus\{\overline{0}\} \to \mathbf{R}$ pätee

$$|f(\overline{x}) - b| \le M|\overline{x}|^\alpha$$

kaikilla $\overline{x} \in B(\overline{0},r)\setminus\{\overline{0}\}$, missä $M>0$ ja $\alpha>0$ ovat vakioita. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{0}} f(\overline{x}) = b.$$

3. Osoita, että Tehtävän 1 funktiolle f pätee $\lim_{\overline{x}\to\overline{0}} f(\overline{x}) = 0$.

4. Määrää funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

raja-arvot origossa pitkin suoria $y=x$ ja $y=3x$. Onko funktiolla varsinaista raja-arvoa origossa?

5. Määrää funktion

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

raja-arvo origossa pitkin käyrää $y=-2x^2$. Onko funktiolla varsinaista raja-arvoa origossa?

6. Olkoot $f,g : B(\overline{a},r)\setminus\{\overline{a}\} \to \mathbf{R}$ funktioita, joille

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b \in \mathbf{R} \quad \text{ja} \quad \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = c \in \mathbf{R}.$$

Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} (f(\overline{x}) + g(\overline{x})) = b + c.$$

7. Määrää raja-arvot

(a) $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$,

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$.