Analyysi II
Harjoitus 4/2004

1. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio $f(\overline{x}) = |\overline{x}|$. Todista, että f on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$. (Vihje! Tutki Lauseen 1.0.4 kolmioepäyhtälöitä.)

2. Määrää osittaisderivaatat $D_1 f(x,y)$ ja $D_2 f(x,y)$ funktioille

(a) $f(x,y) = (x^2 - 1)(y + 2)$,
(b) $f(x,y) = (x^3 + 3y)^{-\frac{2}{3}}$,

niiden määrittelyjoukoissa.

3. Määrää funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - \sin^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{kun } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

osittaisderivaatat origossa.

4. Määrää $D_1 f(\overline{x})$ ja $D_3 f(\overline{x})$ funktioille

(a) $f(\overline{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$,
(b) $f(\overline{x}) = x_1 x_2^2 e^{-x_1 x_2^2 x_3^3}$.

5. Osoita, että kuvaukselle $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y),$$

pätee

$$D_1 f_1(x,y) = D_2 f_2(x,y) \quad \text{ja} \quad D_1 f_2(x,y) = -D_2 f_1(x,y).$$

(Huom! Kyseisiä *osittaisdifferentiaaliyhtälöitä* sanotaan *Cauchy-Riemannin yhtälöiksi* ja yhtälöiden toteuttavia kuvauksia sanotaan *analyyttisiksi*).

6. Olkoon $f(\overline{x}) = \log |\overline{x}|$, missä $\overline{x} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$. Määrää $|\nabla f(\overline{x})|$, kun $\overline{x} \neq \overline{0}$.

7. Olkoon

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{|\overline{x}|},$$

missä $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \overline{0}$. Määrää $|\nabla f(\overline{x})|$, kun $\overline{x} \neq \overline{0}$.