Analyysi II
Harjoitus 5/2004

1. Tutki, onko funktio

$$f(x,y) = |x||y|$$

differentioituva origossa?

2. Laske funktiolle

$$f(x,y) = e^{x^2+2y}$$

kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

3. Olkoon

$$f(\overline{x}) = \log|\overline{x}|,$$

kun $\overline{x} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$. Osoita, että f toteuttaa origon ulkopuolella Laplace-yhtälön

$$D_{11}f(\overline{x}) + D_{22}f(\overline{x}) = 0.$$

4. Olkoon

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{|\overline{x}|},$$

kun $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \overline{0}$. Osoita, että f toteuttaa origon ulkopuolella Laplace-yhtälön

$$D_{11}f(\overline{x}) + D_{22}f(\overline{x}) + D_{33}f(\overline{x}) = 0.$$

5. Olkoon $f : U \to \mathbf{R}^2$ analyyttinen eli $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(U)$ ja f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$D_1f_1(x,y) = D_2f_2(x,y) \quad \text{ja} \quad D_2f_1(x,y) = -D_1f_2(x,y)$$

kaikilla $(x,y) \in U$. Osoita, että $D_{11}f_2(x,y) + D_{22}f_2(x,y) = 0$ kaikilla $(x,y) \in U$.

6. Olkoon

$$f(x,y) = (x-y)^2 + \frac{3}{x^2+1}.$$

Laske funktion f derivaatta suuntaan $(4,5)$ pisteessä $(-1,2)$.

7. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}^2$ yksikkövektori ja olkoon f differentioituva pisteessä $\overline{a}$. Osoita, että

$$\partial_{(-\overline{\alpha})}f(\overline{a}) = -\partial_{\overline{\alpha}}f(\overline{a}).$$