Analyysi II
Harjoitus 6/2004

1. Mihin suuntaan $\overline{\alpha}$ funktio
$$f(x,y) = e^{x^2+2y}$$
vähenee voimakkaimmin pisteessä $(1,-2)$? Määrää edelleen $\partial_{\overline{\alpha}} f(1,-2)$.

2. Olkoon $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivoituva ja asetetaan
$$f(x,y) := g(x^2+y^2).$$
Osoita, että f toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön
$$yD_1 f(x,y) - xD_2 f(x,y) = 0.$$

3. Oletetaan, että funktio $f \in \mathcal{C}^1(U)$ toteuttaa yhtälön
$$xD_1 f(x,y) = yD_2 f(x,y)$$
kaikilla $(x,y) \in U = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \,\}$. Osoita, että funktiolle
$$g(t) = f(t, \frac{2}{t})$$
pätee $g'(t) = 0$ kaikilla $t > 0$.

4. Määrää $D_1(f_2 \circ g)(1,0)$, kun
$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad \text{ja} \quad g(x,y) = (x^2 - y^2, 2y).$$

5. Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ differentioituva siten, että $D_3 f(x,y,z) = z^2$. Laske $D_3(f \circ g)(\overline{0})$, kun
$$g(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, e^{x+y+z}).$$

6. Oletetaan, että differentioituvat kuvaukset $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$, ks. Harjoitus 5/Tehtävä 5. Osoita, että
$$D_1(f_1 \circ g)(\overline{x}) = D_2(f_2 \circ g)(\overline{x})$$
kaikilla $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$.