

Analyysi II

Harjoitus 8/2004

1. Osoita väliarvolauseen avulla, että funktiolle

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

pätee

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq 2|\bar{x} - \bar{y}|$$

kaikilla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^2$.

2. Määrää tasa-arvokäyrän

$$xy - \sin(x + y) = 0$$

pisteeseen $(0, 0)$ liittyvän implisiittifunktion $x \mapsto y(x)$ derivaatta $y'(0)$ implisiittisellä derivoinnilla ja tarkista lasku Lauseen 5.2.1 derivoimiskaavalla.

3. Määrää käyrän

$$x^y = y^x$$

pisteeseen $(1, 1)$ liittyvän implisiittifunktion derivaatta $y'(1)$ implisiittisellä derivoinnilla. (Vihje! $x^y = e^{\log x^y} = e^{y \log x}$.)

4. Määrää $y'(0)$ ja $y''(0)$ implisiittisellä derivoinnilla, kun implisiittifunktiolausetta sovelletaan origossa tasa-arvokäyrään

$$x^3 + y^3 + xy + x + y = 0.$$

5. Määrää funktion

$$f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$$

Hessen matriisi $H_f(1, -1)$ ja ratkaise matriisin $H_f(1, -1)$ ominaisarvot.

6. Olkoon $U \subset \mathbf{R}^2$ avoin, $f \in \mathbf{C}^2(U)$ ja $\bar{a} \in U$. Esitä Hessen matriisin $H_f(\bar{a})$ ominaisarvot toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ja totea, että

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_2 &= D_{11}f(\bar{a})D_{22}f(\bar{a}) - D_{12}f(\bar{a})^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= D_{11}f(\bar{a}) + D_{22}f(\bar{a}).\end{aligned}$$

Huom! Muista tarkistaa tehtävissä 2, 3 ja 4, että implisiittifunktiolauseen oletukset ovat voimassa.