

Analyysi II/Ydinainesanalyysi

Visa Latvala

5. toukokuuta 2004

Esitiedot

Kurssia *Analyysi I* suositellaan esitiedoiksi erityisesti raja-arvon määritelmiin liittyvien tarkastelujen vuoksi. Kurssin loppuosassa edellytetään, että tavanomaiset lukiossa esitettävät integroimiskeinot hallitaan hyvin.

Ydinainesanalyysi

Kurssin kaksiosainen ydinainesanalyysi seuraa sisällysluettelo. Luokittelulla ydinaineksiin 1 ja 2 tarkoitetaan seuraavaa:

Ydinaines 1: Kurssin keskeistä sisältöä kurssin ymmärtämisen, muiden kurssien tai sivuaineiden kannalta. Tähän osaan panostetaan kurssin opetuksessa ja aines edellytetään yksityiskohtia myöten osattavaksi.

Ydinaines 2: Sisältöä, joka ei ole ehdottoman välttämätöntä esitettäväksi ja/tai jota ei ole mielekästä vaatia yleisesti osattavaksi kurssilla. Tämä aines on kuitenkin ainakin osalle opiskelijoista jatkon kannalta keskeistä tai yleisesti motivoivaa.

Huom! Kurssilla keskeiset määritelmät ja tulokset esitetään yleisessä dimensiossa, mutta pääpaino on vahvasti dimensiossa $n = 2$. Osa tarkasteluista tehdään myös dimensiossa $n = 3$.

1. Vektoriavaruudet \mathbf{R}^2 ja \mathbf{R}^n

1.1 Vektorien summa, sisätulo ja normi

Ydinaines 1: Laskutoimituksia ja normia koskevat peruslaskusäännöt \mathbf{R}^n :ssä. Kolmioepäyhtälö, kosinilause ja Cauchyn epäyhtälö dimensiossa $n = 2$.

Ydinaines 2: Kolmioepäyhtälö, kosinilause ja Cauchyn epäyhtälö yleisessä dimensiossa.

1.2 Tason topologiaa

Ydinaines 1: Vektorijonon suppenemista koskevat laskusäännöt. Avoimen ja suljetun joukon määritelmä intuitiivisella tasolla.

Ydinaines 2: Vektorijonon suppenemista koskevat yksinkertaiset ε -todistukset. Avoimen joukon eksakti määritelmä.

2. Useamman muuttujan funktiot

2.1 Kahden muuttujan funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Ydinaines 1: Kuvaukseen liittyvät peruskäsitteet. Kahden muuttujan funktion raja-arvotarkastelut (pitkin käyrää ja ilman rajoitetta). Napakoordinaattien hyödyntäminen raja-arvon ole-massaolon tarkastelussa. Yksinkertaiset jatkuvuustarkastelut.

Ydinaines 2: Kahden muuttujan funktion raja-arvon ε -määritelmä.

3. Differentiaalilaskenta

3.1 Osittaisderivaatta

Ydinaines 1: Osittaisderivaatan määritelmä ja laskusäännöt.

Ydinaines 2: Cauchy-Riemannin yhtälöt.

3.2 Differentioituvuus

Ydinaines 1: Differentioituvuuden tunnistaminen C^1 -ominaisuuden kautta. Differentiaali.

Ydinaines 2: Differentioituvuuden määritelmään liittyvät raja-arvotarkastelut.

3.3 Korkeamman kertaluvun derivaatat

Ydinaines 1: Toisen kertaluvun osittaisderivointi, mm. Laplace yhtälö.

Ydinaines 2: -

3.4 Gradientti ja suunnattu derivaatta

Ydinaines 1: Gradientin ja sen normin laskeminen. Suunnatun derivaatan laskeminen. Optimaalisen kasvun ja nollakasvun suunnat.

Ydinaines 2: -

3.5 Yhdistettyjen kuvausten derivoiminen

Ydinaines 1: Ketjusääntö ensimmäisen kertaluvun derivoinnissa, mm. yhdistetyn kuvauk-sen analyyttisyys.

Ydinaines 2: Ketjusääntö toisen kertaluvun derivoinnissa, mm. yhdistetyn kuvauksen har-monisuus.

4. Käyrät ja pinnat

4.1 Tasa-arvokäyrä ja tasa-arvokäyrän tangentti

Ydinaines 1: Janan ja ympyrän parametriesitykset. Tasa-arvokäyrään liittyvä gradientin geometrinen tulkinta.

Ydinaines 2: Ketjusäännön rooli todistuksissa.

4.2 Tasa-arvopinnat ja tangenttitaso

Ydinaines 1: -

Ydinaines 2: Tasa-arvopintaan liittyvä gradientin geometrinen tulkinta.

5. Väliarvolause ja implisiittifunktiolause

5.1 Väliarvolause

Ydinaines 1: Yksinkertaiset väliarvolauseeseen perustuvat arviot.

Ydinaines 2: Väliarvolauseen johtaminen ketjusääntöä käyttäen.

5.2 Implisiittifunktiolause

Ydinaines 1: Implisiittifunktiolauseen sisällön ymmärtäminen ja implisiittisen derivoinnin suorittaminen.

Ydinaines 2: Ketjusäännön rooli implisiittifunktion derivoimiskaavassa.

6. Ääriarvojen teoriaa

6.1 Lokaalit ääriarvot

Ydinaines 1: Lokaalien ääriarvojen määrittäminen tapauksessa $n = 2$ osittaisderivaattojen avulla.

Ydinaines 2: Hessen matriisin ominaisarvojen määrittäminen.

6.2 Sidotut ääriarvot

Ydinaines 1: Yksinkertaiset sidotut ääriarvot tehtävät.

Ydinaines 2: Ketjusäännön rooli sidotun ääriarvo-ongelman tarkastelussa.

6.3 Globaalit ääriarvot

Ydinaines 1: Kompaktin joukon intuitiivinen tunnistaminen ja globaalien ääriarvojen määrittäminen.

Ydinaines 2: Globaalien ääriarvojen olemassaolon eksakti perustelevminen.

7. Käyräintegraalit

7.1 Lyhyesti Riemannin integraalista

Ydinaines 1: Muuttujan vaihto Riemannin integraalissa.

Ydinaines 2: Tavanomaiset integroimissäännöt (*Luokiteltu ydinainekseen 2 koska aika ei anna myöten näiden perusteelliseen tarkasteluun!*)

7.2 Käyräintegraalin määritelmä

Ydinaines 1: Käyräintegraalin laskeminen suoraan määritelmästä. Kaaren suunnistuksen kääntäminen.

Ydinaines 2: -

7.3 Vektorikentän potentiaali

Ydinaines 1: Käyräintegraalin laskeminen potentiaalilla. Potentiaaliolemassaolon tunnistaminen ja potentiaaliolemassaolon määrittäminen vakion varioinnilla. Potentiaaliolemassaolon määrittäminen sopivasti valitun käyräintegraalin avulla.

Ydinaines 2: Potentiaaliolemassaolotiedon hyödyntäminen (potentiaalia tuntematta) käyräintegroinnissa.

7.4 Käyrän pituus ja integrointi kaaren pituuden suhteen

Ydinaines 1: Käyrän pituuden laskeminen.

Ydinaines 2: Integrointi kaaren pituuden suhteen.

8. Pintaintegraalit

8.1 Pintaintegraalit yli suorakulmion

Ydinaines 1: Pinta-integraalin lasku kaksoisintegraalina yli suorakulmion.

Ydinaines 2: Pinta-integraalin määritelmään liittyviä tarkasteluja.

8.2 Pintaintegraali yli yleisen alueen

Ydinaines 1: Pinta-integraalien laskeminen yli yleisempien alueiden. Pintaintegraalin lineaarisuus, additiivisuus ja monotonisuus esimerkkilaskujen tasolla.

Ydinaines 2: Mitallisiin joukkoihin liittyviä tarkasteluja.

8.3 Greenin kaava

Ydinaines 1: Greenin kaavan sovellutukset käyräintegraalin laskemisessa ja joukon mitan määräämisessä.

Ydinaines 2: Greenin kaavaan liittyviä teoreettisia tarkasteluja.

8.4 Muuttujan vaihto pintaintegraalissa

Ydinaines 1: Napakoordinaattimuunnoksen käyttö pinta-integraalilaskuissa. Jacobin determinantti.

Ydinaines 2: -