Analyyysi II

Visa Latvala ja Jari Taskinen

7. toukokuuta 2004

Sisältö

8 Pintaintegraalit

8.1 Pintaintegraali yli suorakulmion

Olkoon $R \subset \mathbf{R}^2$ suljettu suorakulmio

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \},$$

missä $a < b$ ja $c < d$. Olkoot $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ ja $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ ja merkitään

$$R_{ij} = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x_{i-1} < x < x_i,\ y_{j-1} < y < y_j \}.$$

Sanotaan, että R on jaettu osasuorakulmioihin R_{ij}.

Porrasfunktio (askelfunktio) $\phi : R \to \mathbf{R}$ on funktio, joka saa vakioarvon $c_{ij} \in \mathbf{R}$ jokaisessa avoimessa osasuorakulmiossa R_{ij}, ts.

$$\phi(x, y) = c_{ij}, \quad (x, y) \in R_{ij}.$$

Osasuorakulmioiden R_{ij} reunalla porrasfunktion arvo voidaan valita vapaasti.

Määritelmä 8.1.1 Porrasfunktion $\phi : R \to \mathbf{R}$ *pintaintegraali* on luku

$$\int_R \phi = \sum_{i,j} c_{ij} m(R_{ij}),$$

missä $m(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ on osasuorakulmion R_{ij} pinta-ala.

Pinta-integraalille käytetään vaihtoehtoisesti merkintöjä

$$\int_R \phi = \iint\limits_R \phi(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \phi(x, y)\, dxdy.$$

Huomautus Jos $\phi : R \to \mathbf{R}$ on porrasfunktio ja $\phi(x, y) \geq 0$ kaikilla $(x, y) \in \cup_{i,j} R_{ij}$, niin pintaintegraali $\int_R \phi$ antaa porrasfunktion ϕ kuvaajan ja tason $z = 0$ välisen kolmiulotteisen kappaleen tilavuuden.

Olkoon $f : R \to \mathbf{R}$ rajoitettu, so. on olemassa luvut $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ siten, että $\alpha \leq f(x, y) \leq \beta$ kaikilla $(x, y) \in R$. Tällöin on olemassa porrasfunktiot $\phi, \psi : R \to \mathbf{R}$ siten, että

$$\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \cup_{i,j} R_{ij}. \tag{1}$$

Seuraavassa ehto (1) ilmaistaan lyhyesti kirjoittamalla $\phi \leq f \leq \psi$.

Määritelmä 8.1.2 Olkoon $f : R \to \mathbf{R}$ rajoitettu. Funktiota f sanotaan *integroituvaksi (Riemann-integroituvaksi) yli suorakulmion* R, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa jako osasuorakulmioihin R_{ij}, johon liittyvät porrasfunktiot $\phi, \psi : R \to \mathbf{R}$ toteuttavat ehdot $\phi \leq f \leq \psi$ ja

$$\int_R \psi - \int_R \phi < \varepsilon.$$

Huomaa, että ehdosta $\phi \leq \psi$ (eli ominaisuudesta $\phi(x,y) \leq \psi(x,y)$ kaikilla $(x,y) \in \cup_{i,j} R_{ij}$) seuraa välittömästi epäyhtälö

$$\int_R \phi \leq \int_R \psi$$

porrasfunktioiden pintaintegraaleille. Siispä Määritelmässä 8.1.2 pätee itseasiassa

$$0 \leq \int_R \psi - \int_R \phi < \varepsilon.$$

Lause 8.1.3 Jos $f : R \to \mathbf{R}$ on integroituva, on olemassa yksikäsitteinen luku $\lambda \in \mathbf{R}$, jolle pätee

$$\int_R \phi \leq \lambda \leq \int_R \psi$$

kaikille porrasfunktioille $\phi \leq f \leq \psi$.

Todistus. Todistus löytyy kirjasta Persson-Böiers, s. 203. $\square$

Lukua λ kutsutaan funktion f *pinta-integraaliksi* yli suorakulmion R, merkitään

$$\lambda = \int_R f,$$

tai vaihtoehtoisesti

$$\lambda = \iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b\!\!\int\limits_c^d f(x,y)\,dxdy.$$

Esimerkki 8.1.4 Määritellään yksikköneliössä $R = [0,1] \times [0,1]$ funktio $f : R \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in R \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) \\ 1, & (x,y) \in R \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) \end{cases}$$

Tällöin f ei ole Riemann-integroituva suorakulmiossa R (Perustele!)

Yleensä tarkastellaan kuitenkin jatkuvia funktioita, jotka ovat integroituvia. Seuraava tulos on pinta-integraalin laskemisen kannalta keskeinen:

Lause 8.1.5 Olkoon $f : R \to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin f on integroituva suorakulmiossa R ja

$$\int\limits_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Todistus. Todistus löytyy kirjasta Persson-Böiers, s. 204–207. $\square$

Pinta-integraalin geometrinen tulkinta Jos f on ei-negatiivinen funktio suorakulmiossa R, pinta-integraali $\int\limits_R f$ antaa pinnan $z = f(x,y)$ ja tason $z = 0$ väliin suorakulmiossa R jäävän tilavuuden. Jos f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, pinta-integraali laskee tason $z = 0$ alapuolella olevan osan tilavuuden negatiivisena.

Esimerkki 8.1.6 (a) Olkoon $f(x,y) = 4 - x - y$ ja $R = [0,2] \times [0,1]$. Lauseen 8.1.5 mukaan

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_R f &= \textstyle\int_0^2 \Big(\int_0^1 (4-x-y)\,dy\Big)\,dx \\
&= \textstyle\int_0^2 \Big(\Big/_0^1 (4y - yx - \frac{1}{2}y^2)\Big)\,dx \\
&= \textstyle\int_0^2 (\frac{7}{2} - x)\,dx = \Big/_0^2 (\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2) = 5.
\end{aligned}$$

Toisin päin integroituna

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_R f &= \textstyle\int_0^1 \Big(\int_0^2 (4-x-y)\,dx\Big)\,dy \\
&= \textstyle\int_0^1 \Big(\Big/_0^2 (4x - \frac{1}{2}x^2 - yx)\,dx\Big)\,dy \\
&= \textstyle\int_0^1 (6-2y)\,dy = \Big/_0^1 (6y - y^2) = 5.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan laskun ideaa geometrisesti (ks. kuva). Olkoon K kolmiulotteinen monitahokas

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x - y \,\}.$$

Tällöin

$$A(x) := \int_0^1 (4-x-y)\,dy, \quad 0 \le x \le 2,$$

antaa kappaleen K leikkauspinnan alan leikattaessa kohtisuoraan x-akseliin nähden. Edelleen Riemannin summia käyttäen nähdään, että

$$\int_0^2 A(x)\,dx$$

antaa kappaleen K tilavuuden.

Vastaavasti

$$A(y) := \int_0^2 (4-x-y)\,dx, \quad 0 \le y \le 1,$$

antaa kappaleen K leikkauspinnan alan leikattaessa kohtisuoraan y-akseliin nähden ja

$$\int_0^1 A(y)\,dy$$

antaa kappaleen K tilavuuden. Tämä päättely (eksaktisti toteutettuna) on myös Lauseen 8.1.5 todistuksen idea.

(b) Integroimisjärjestyksellä voi olla suurestikin merkitystä pinta-integraalin laskemisen kannalta (ainakin käsin laskettaessa). Olkoon

$$R = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi \,\}.$$

Lauseen 8.1.5 mukaan

$$\begin{aligned}
\iint_R y\cos xy\,dxdy &= \textstyle\int_0^\pi \Big(\int_0^1 y\cos xy\,dx\Big)\,dy \\
&= \textstyle\int_0^\pi \Big(\Big/_0^1 \sin xy\Big)\,dy = \int_0^\pi \sin y\,dy = \Big/_0^\pi (-\cos y) = 2.
\end{aligned}$$

Toisessa järjestyksessä integroituna päädytään ongelmiin.

Pinta-integrointi on mm. lineaarinen ja monotoninen operaatio. Seuraavan lauseen todistus on olennaisesti sama kuin sen kurssilla Analyysi III todistettavan yksiulotteisen vastineen.

Lause 8.1.7 Olkoot $f, g : R \to \mathbf{R}$ suorakulmiossa R integroituvia funktioita. Tällöin

(a) funktio $f+g$ on integroituva ja

$$\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g,$$

(b) funktio αf on integroituva kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$ ja

$$\int_R (\alpha f) = \alpha \int_R f,$$

(c) Jos $f(x,y) \leq g(x,y)$ kaikilla $(x,y) \in R$, niin $\int_R f \leq \int_R g$,

(d) itseisarvofunktio $|f|$ on integroituva ja $|\int_R f| \leq \int_R |f|$,

(e) tulofunktio fg on integroituva.

8.2 Pinta-integraali yli yleisen alueen

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu ja olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ rajoitettu funktio. Laajennetaan f koko tasoon $\mathbf{R}^2$ määrittelemällä *nollajatko* f_A funktiona

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus A. \end{cases}$$

Valitaan suljettu suorakulmio R siten, että $A \subset R$. Funktion f *pinta-integraali yli joukon* A määritellään asettamalla

$$\int\limits_A f := \int\limits_R f_A,$$

jos oikeanpuoleinen integraali on olemassa. Voidaan osoittaa, että määritelmä ei riipu apusuorakulmion R valinnasta.

Annettuja määritelmiä käyttäen Lauseen 8.1.7 ominaisuudet on helppo siirtää yleiseen integroimisjoukkoon A:

Lause 8.2.1 Olkoot $f, g : A \to \mathbf{R}$ rajoitetussa joukossa $A \subset \mathbf{R}^2$ integroituvia funktioita. Tällöin

(a) funktio $f+g$ on integroituva joukossa A ja

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g,$$

(b) funktio αf on integroituva joukossa A kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$ ja

$$\int_A (\alpha f) = \alpha \int_A f,$$

(c) Jos $f(x,y) \leq g(x,y)$ kaikilla $(x,y) \in A$, niin $\int_A f \leq \int_A g$,

(d) itseisarvofunktio $|f|$ on integroituva joukossa A ja $|\int_A f| \leq \int_A |f|$,

(e) tulofunktio fg on integroituva joukossa A.

Todistus. Todistetaan malliksi (a). Olkoon R suorakulmio siten, että $A \subset R$. Nyt

$$(f+g)_A = f_A + g_A$$

(eli $(f(x,y)+g(x,y))_A = f_A(x,y) + g_A(x,y)$ kaikilla $(x,y) \in R$), joten Lauseen 8.1.7 kohdan (a) nojalla

$$\int_A (f+g) = \int_R (f+g)_A = \int_R (f_A + g_A) = \int_R f_A + \int_R g_A = \int_A f + \int_A g.$$

□

Kaksoisintegrointi voidaan suorittaa yli suorakulmiota yleisempien alueiden seuraavasti:

Lause 8.2.2 Olkoot $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuvia siten, että $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Jos funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva alueessa

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

niin

$$\int\limits_A f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Vastaavasti, jos

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

missä $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia siten, että $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ kaikilla $y \in [c,d]$, ja jos $f : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin

$$\int\limits_A f = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Esimerkki 8.2.3 (a) Lasketaan

$$\iint\limits_A x^2\, dxdy,$$

kun $A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y \leq \sqrt{x}\,\}$. Koska $x \leq y \leq \sqrt{x}$ jos ja vain jos $0 \leq x \leq 1$, niin Lauseen 8.2.2 mukaan

$$\begin{aligned}\iint\limits_A x^2\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} x^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\Big/_x^{\sqrt{x}} x^2 y \right) dx \\ &= \int_0^1 (x^2\sqrt{x} - x^3)\, dx = \Big/_0^1 \left(\tfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \tfrac{x^4}{4}\right) = \tfrac{1}{28}.\end{aligned}$$

(b) Esimerkissä 8.1.6 nähtiin, että integroimisjärjestys voi olla ratkaiseva pintaintegraalin laskemisen kannalta. Tutkitaankin, kuinka integraali

$$I = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)\, dy \right) dx$$

lasketaan käännetyssä integroimisjärjestyksessä? Nyt integroimisjoukko A on muotoa

$$A = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\, x^2 \leq y \leq 2x \}.$$

Jos joukkoa A lähestytään vasemmalta pitkin x-akselin suuntaista suoraa L välillä $0 \leq y \leq 4$, niin L leikkaa A:n ensin suoralla $y = 2x$ eli arvolla $x = \frac{y}{2}$ ja jättää A:n käyrällä $y = x^2$ eli arvolla $x = \sqrt{y}$. Siis integroimisjoukko voidaan esittää myös muodossa

$$A = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4,\, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \}$$

eli I saadaan integraalina

$$I = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Mitalliset joukot

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, so. $A \subset B(\overline{0}, R)$ jollekin $R > 0$. Joukon A *karakteristinen funktio* 1_A määritellään asettamalla

$$1_A(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus A. \end{cases}$$

Rajoitettua joukkoa $A \subset \mathbf{R}^2$ sanotaan *mitalliseksi*, jos 1_A on integroituva joukossa A. Tällöin integraalia

$$m(A) := \int_A 1_A$$

kutsutaan joukon A *mitaksi (pinta-alaksi)* $m(A)$. Jos $m(A) = 0$, joukkoa $A \subset \mathbf{R}^2$ sanotaan *nollamittaiseksi*.

Esimerkki 8.2.4 (a) Osoitetaan integraalin määritelmään nojaten, että pisteiden $(0,0)$ ja $(1,0)$ välinen (suljettu) jana I on nollamitallinen. On siis osoitettava, että

$$\int_R 1_I = 0.$$

Valitaan suorakulmio R, jonka kärjet ovat $(-1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$, $(-1,1)$. Jos $0 < \varepsilon < 1$ on annettu, jaetaan R osasuorakulmioihin suorilla $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{\varepsilon}{8}$, $y = \frac{\varepsilon}{8}$. Valitaan porrasfunktiot $\phi, \psi : R \to \mathbf{R}$ siten, että $\phi \equiv 0$ joukossa R ja $\psi = 1$ janan I sisältämässä osasuorakulmiossa sekä $\psi = 0$ muissa osasuorakulmioissa. Nyt porrasfunktioiden pintaintegraaleiksi saadaan

$$\int_R \phi = 0, \quad \int_R \psi = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siis $\phi \leq 1_I \leq \psi$ ja

$$\int_R \psi - \int_R \phi < \varepsilon,$$

joten 1_I on integroituva yli suorakulmion R. Koska kaikilla $0 < \varepsilon < 1$ pätee

$$0 \leq \int_R 1_I < \varepsilon,$$

on välttämättä $\int_R 1_I = 0$.

(b) Huomaa, että Esimerkin 8.1.4 mukaan joukko

$$A = ([0,1] \times [0,1]) \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$$

ei ole mitallinen.

Seuraava ominaisuus (*additiivisuus*) on olennainen kaikessa integroinnissa:

Lause 8.2.5 Olkoon $A = \cup_{j=1}^k A_i \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu joukko siten, että joukot A_i ovat mitallisia ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$ (joukot A_i ovat pareittain pistevieraita). Tällöin rajoitettu funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on integroituva joukossa A jos ja vain jos f on integroituva joukossa A_i kaikilla $i = 1, \ldots, k$ ja tällöin

$$\int_A f = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f.$$

Todistus. Valitaan suorakulmio R, jolle $A \subset R$. Oletetaan ensin, että f on integroituva joukossa A. Siis f_A on integroituva joukossa R. Koska joukot A_i ovat mitallisia, on 1_{A_i} integroituva joukossa R, $i = 1, \ldots, k$. Nyt

$$f_{A_i} = f_A \cdot 1_{A_i},$$

joten Lauseen 8.2.1 (e) nojalla f_{A_i} on integroituva joukossa R, ts. f on integroituva joukossa A_i, $i = 1, \ldots, k$.

Oletetaan kääntäen, että f on integroituva jokaisessa joukossa A_i, $i = 1, \ldots, k$. Siis f_{A_i} on integroituva joukossa R kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Koska joukot A_i ovat pareittain pistevieraita, on

$$f_A = \sum_{i=1}^k f_{A_i}.$$

Lauseen 8.2.1 (a) nojalla

$$\int_A f = \int_R f_A = \int_R \sum_{i=1}^k f_{A_i} = \sum_{i=1}^k \int_R f_{A_i} = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f.$$

□

Huomautus 8.2.6 (a) Lause 8.2.5 pätee myös lievemmällä oletuksella, että

$$m(A_i \cap A_j) = 0$$

aina kun $i \neq j$. Tämän perusteleminen sivuutetaan. Huomaa kuitenkin, että tällaista versiota Lauseesta 8.2.5 tarvitaan laskuesimerkeissä.

(b) Esimerkeissä tarvitaan myös tietoa siitä, minkälaiset joukot ovat nollamittaisia. Esimerkiksi voidaan todistaa:

(i) Jos $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ on säännöllinen kaari, niin $m(\Gamma) = 0$,

(ii) Jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin kuvaaja $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ y = f(x) \}$ on nollamittainen joukko.

(c) Integroitaessa tyypillinen tilanne on se, että integroidaan funktiota joka on jatkuva nollamittaisen joukon ulkopuolella. Esimerkiksi voidaan todistaa: Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu joukko siten, että $m(\partial A) = 0$ (tässä ∂A on joukon A reunakäyrä jos A on umpinaisen käyrän rajaama alue). Tällöin jokainen rajoitettu ja jatkuva funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on integroituva joukossa A.

Esimerkki 8.2.7 Tarkastellaan integraalia

$$\iint_A xy\, dxdy,$$

kun A on käyrien $y = x$ ja $y = x^3$ rajaama rajoitettu alue. Alue A jakautuu kahteen osaan A_1 ja A_2, joiden leikkaus on nollamittainen. Osat ovat

$$A_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ x \le y \le x^3 \}$$

ja

$$A_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x \}.$$

Huomautuksen 8.2.6 nojalla (helppo integrointi on jätetty kirjoittamatta)

$$\begin{aligned} \iint_A xy\, dxdy &= \iint_{A_1} xy\, dxdy + \iint_{A} xy\, dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} \left(\int_x^{x^3} xy\, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x} xy\, dy \right) dx = \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Mikä virhe on laskussa

$$\iint_A xy\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_x^{x^3} xy\, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\Big/_{x}^{x^3} \frac{xy^2}{2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^7}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx = 0?$$

Esimerkki 8.2.8 Todistetaan vielä, että nollamittaisen joukon osajoukko on aina nollamittainen. Tämä ei seuraa suoraan Lauseesta 8.2.1 (c) (miksi ei?).

Olkoot $A \subset B \subset \mathbf{R}^2$ ja $m(B) = 0$. Olkoon edelleen $R \subset \mathbf{R}^2$ suorakulmio siten, että $B \subset R$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan 1_B on integroituva joukossa R, joten on olemassa suorakulmion R jako osasuorakulmioihin siten, että porrasfunktiolle $\psi : R \to \mathbf{R}$ pätee $1_B \le \psi$ ja

$$0 = \int_R 1_B \le \int_R \psi < \varepsilon.$$

Olkoon $\phi = 0$ joukossa R. Tällöin porrasfunktioille ϕ, ψ on voimassa $\phi \le 1_A \le 1_B \le \psi$ ja

$$\int_R \psi - \int_R \phi < \varepsilon.$$

Määritelmän 8.1.2 mukaan 1_A on integroituva joukossa R ja

$$0 = \int_R \phi \le \int_R 1_A \le \int_R \psi < \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, on välttämättä $\int_R 1_A = 0$ eli $m(A) = 0$.

8.3 Greenin kaava

Tarkastellaan seuraavaksi *Greenin kaavaa*, joka antaa pinta- ja käyräintegraalien välisen yhteyden.

Määritelmä Joukon $A \subset \mathbf{R}^2$ *reuna* ∂A on niiden pisteiden $\overline{x} \in \mathbf{R}^2$ joukko, joille

$$B(\overline{x}, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad B(\overline{x}, r) \cap (\mathbf{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$$

kaikille säteille $r > 0$.

Siis mielivaltaisen lähellä jokaista reunan ∂A pistettä on aina sekä A:n että $\mathbf{R}^2 \setminus A$:n pisteitä.

Pohdiskele seuraavia reunaa koskevia väitteitä!

Esimerkki (a) Jos $A = B(\overline{y}, R) \subset \mathbf{R}^2$, niin

$$\partial A = \partial B(\overline{y}, R) = \{\, \overline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid |\overline{x} - \overline{y}| = R \,\}.$$

(b) Yleisesti, jos A on paloittain säännöllisen umpinaisen käyrän sisään jäävä tasoalue, niin reuna ∂A on rajoittavien käyrien yhdiste.

(c) Mitä on $\partial(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$?

Olkoon

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \,\}, \tag{2}$$

missä $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $\phi_1(a) \leq \phi_2(a)$, $\phi_1(b) \leq \phi_2(b)$ ja $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$. Olkoon edelleen f eräässä A:n sisältävässä avoimessa joukossa jatkuvasti derivoituva funktio. Tällöin Lauseen 8.2.2 mukaan

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_A D_2 f &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} D_2 f(x, y)\, dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\Big/_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \right) dx \\
&= \int_a^b [f(x, \phi_2(x)) - f(x, \phi_1(x))]\, dx \\
&= \textstyle\int_a^b f(x, \phi_2(x))\, dx - \int_a^b f(x, \phi_1(x))\, dx.
\end{aligned}$$

Joukon A reuna ∂A voidaan esittää yhdisteenä

$$\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

missä positiiviseen suuntaan suunnistettujen kaarien Γ_i parametriesitykset ovat

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : (x, y) &= (t, \phi_1(t)), \quad t \in [a, b], \\
\Gamma_2 : (x, y) &= (b, t), \quad t \in [\phi_1(b), \phi_2(b)], \\
\Gamma_3 : (x, y) &= (t, \phi_2(t)), \quad t \in [b, a], \\
\Gamma_4 : (x, y) &= (a, t), \quad t \in [\phi_2(a), \phi_1(a)]
\end{aligned}$$

(pidetään tässä tunnettuna, että käyräintegraalin määritelmä toimii vaikka parametriväli on suuremmasta pienempään). Lasketaan vektorikentän $(f, 0)$ käyräintegraali yli reunan ∂A positiiviseen suuntaan. Saadaan

$$\int_{\partial A} f\, dx + 0\, dy = \int_{\partial A} f\, dx = \int_{\Gamma_1} f\, dx + \int_{\Gamma_2} f\, dx + \int_{\Gamma_3} f\, dx + \int_{\Gamma_4} f\, dx.$$

Selvästi

$$\int_{\Gamma_2} f\,dx = 0 = \int_{\Gamma_4} f\,dx,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} f\,dx &= \int_{\Gamma_1} f\,dx + \int_{\Gamma_3} f\,dx = \int_a^b f(t,\phi_1(t))\,dt + \int_b^a f(t,\phi_2(t))\,dt \\
&= \int_a^b f(t,\phi_1(t))\,dt - \int_a^b f(t,\phi_2(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä tulokset todetaan, että

$$\int_A D_2 f = -\int_{\partial A} f\,dx. \tag{3}$$

Oletetaan vastaavasti, että A voidaan esittää muodossa

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \,\}, \tag{4}$$

missä $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $\psi_1(c) \le \psi_2(c)$, $\psi_1(d) \le \psi_2(d)$ ja $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ kaikilla $y \in]c,d[$. Samalla tavoin kuin edellä todetaan, että (harjoitustehtävä)

$$\int_A D_1 f = \int_{\partial A} f\,dy \tag{5}$$

aina kun f on A:n sisältävässä avoimessa joukossa jatkuvasti derivoituva funktio. Miksi kaavassa (3) on miinusmerkki, mutta kaavassa (5) ei? Eräs selitys tälle on se, että x-koordinaatit kasvavat positiiviseen suuntaan kun taas y-koordinaatit kasvavat negatiiviseen suuntaan. Yhdistämällä kaavat (3) ja (5) saadaan todistettua Greenin kaava tarkasteltavassa tapauksessa:

Lause 8.3.1 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ joukko, joka voidaan esittää sekä muodossa (2) että muodossa (4). Olkoon $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä avoimessa joukossa U, joka sisältää joukon A. Tällöin

$$\int_A (D_1 f_2 - D_2 f_1) = \int_{\partial A} f_1 dx + f_2\,dy,$$

kun käyräintegraali lasketaan positiiviseen suuntaan.

Todistus. Vektorikenttä $f = (f_1, f_2)$ voidaan esittää summana $(f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$, joten käyrä- ja pintaintegraalien lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} f_1\,dx + f_2\,dy &= \int_{\partial A} f_1\,dx + \int_{\partial A} f_2\,dy \\
&= -\int_A D_2 f_1 + \int_A D_1 f_2 \\
&= \int_A (D_1 f_2 - D_2 f_1).
\end{aligned}$$

Totea ensimmäinen yhtälö laskemalla määritelmät auki! $\square$

Huomautus 8.3.2 (a) Greenin kaava pätee yleisemmin, jos A on paloittain säännöllisen umpinaisen käyrän sisään jäävä alue.

(b) Greenin kaava täydentää luvun 7.3 potentiaalitarkasteluja. Esimerkiksi se kertoo, että tasossa $\mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituvan vektorikentän $f = (f_1, f_2)$ käyräintegraali yli pallon reunan ∂B on nolla jos ja vain jos integroimisehto $D_1 f_2 = D_2 f_1$ pätee pallon sisällä. Tämä puolestaan on ekvivalenttia sen kanssa, että vektorikentällä f on potentiaali (Lause 7.3.6).

Greenin kaavaa voidaan hyödyntää monella tavalla. Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä pinta-alan laskemista tapauksessa, jossa tavallinen Riemannin integrointi johtaa vaikeuksiin.

Esimerkki 8.3.3 Lasketaan ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rajoittama alueen A pinta-ala $m(A)$. Jos valitaan $f_2(x, y) = x$ ja $f_1(x, y) = 0$, Greenin kaavasta saadaan

$$\int\limits_{\partial A} x\, dy = \int\limits_{A} 1 = m(A).$$

Tarkasteltavan ellipsin parametriesitys on

$$\begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

joten kaksinkertaisen kosinin kaavan nojalla

$$\begin{aligned} m(A) &= \int\limits_{\partial A} x\, dy = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = ab\int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t)\, dt \\ &= ab\Big/_0^{2\pi} (\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t) = \pi ab. \end{aligned}$$

Kuten edellisessäkin esimerkissä nähtiin, Greenin kaava on käyttökelpoinen käyräintegraaleja laskettaessa myös tapauksessa jossa integroituvuusehto ei päde (potentiaalia ei ole olemassa).

Esimerkki 8.3.4 (a) Olkoon $A = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le \delta^2 \,\}$, $\delta > 0$. Lasketaan

$$\int_{\partial A} 2y\, dx - 3x\, dy$$

positiiviseen suuntaan. Nyt $f_1(x, y) = 2y$ ja $f_2(x, y) = -3x$, joten $D_2 f_1(x, y) = 2$ ja $D_1 f_2(x, y) = -3$. Siis vektorikentällä ei ole potentiaalia. Greenin kaavan ja Lauseen 8.2.1 (b) mukaan

$$\int\limits_{\partial A} f_1 dx + f_2\, dy = \int\limits_{A} (D_1 f_2 - D_2 f_1) = \int\limits_{A} (-5) = -5m(A) = -5\pi\delta^2.$$

(b) Lasketaan

$$\int_\Gamma 2y\, dx - 3x\, dy,$$

kun Γ on murtoviiva $(1,0) \to (1,1) \to (0,1) \to (0,0)$. Jos A on neliö, jonka kärkipisteet ovat $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ja $(1,0)$, niin kohdan (a) tapaan päätellään, että positiiviseen suuntaan integroituna

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy = -5m(A) = -5.$$

Toisaalta, jos Γ_1 on jana $(0,0) \to (1,0)$, niin Γ_1:n parametriesitys on $(t,0)$, $t \in [0,1]$, ja siis

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy = \int_0^1 (2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot t \cdot 0)\,dt = 0.$$

Koska

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 3x\,dy = \int_{\Gamma_1} 2y\,dx - 3x\,dy + \int_{\Gamma} 2y\,dx - 3x\,dy,$$

saadaan

$$\int_{\Gamma} 2y\,dx - 3x\,dy = -5.$$

(c) Lasketaan Greenin kaavan avulla

$$\int_{\Gamma} y^2 e^x\,dx + (2ye^x + x)\,dy,$$

$\Gamma = \{\, (\cos t, \sin t) \mid 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \,\}$, samantapaisella idealla jota yleensä käytetään potentiaalin yhteydessä (jolloin siis käyräintegraali yli umpinaisen integroimistien on nolla).

Olkoon Γ_1 jana pisteestä $(0,1)$ origoon ja Γ_2 jana origosta pisteeseen $(1,0)$. Merkitään

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \,\}.$$

Greenin kaavan mukaan (merkitään $f_1(x,y) = y^2 e^x$ ja $f_2(x,y) = 2ye^x + x$)

$$\int_{\partial A} f_1\,dx + f_2\,dy = \iint\limits_A (D_1 f_2(x,y) - D_2 f_1(x,y))\,dxdy = \iint\limits_A 1\,dxdy = m(A) = \frac{\pi}{4}.$$

Toisaalta laskemalla yhteen käyräintegraalit yli janojen Γ_1 ja Γ_2 saadaan (janojen parametriesitykset ja sijoitus käyräintegraalin määritelmään on jätetty kirjoittamatta)

$$\int_{\Gamma_1} f_1\,dx + f_2\,dy + \int_{\Gamma_2} f_1\,dx + f_2\,dy = \int_1^0 2t\,dt + \int_0^1 0\,dt = -1.$$

Koska

$$\frac{\pi}{4} = \int_{\partial A} f_1\,dx + f_2\,dy = \int_{\Gamma} f_1\,dx + f_2\,dy + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} f_1\,dx + f_2\,dy,$$

saadaan $\int_{\Gamma 1} f_1\,dx + f_2\,dy = \frac{\pi}{4} + 1$.

8.4 Muuttujan vaihto pintaintegraalissa

Jos A on ympyrä, pintaintegraalin $\int_A f$ laskeminen Lauseen 8.2.2 tavalla on usein hankalaa.

Esimerkki Yksinkertaisimpia tapauksia on

$$\int\limits_{B(\bar{0},R)} 1 = \int\limits_{-R}^{R} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int\limits_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx,$$

mutta kuinka viimeksi mainittu integroidaan? Edellä on toki jo annettu kaksi keinoa, nimittäin

(1) Muuttujanvaihto $x = R\sin t$, vrt. Esimerkki 7.1.2,

(2) Greenin kaava, vrt. Esimerkki 8.3.3.

Usein pinta-integrointi yli ympyrän suoritetaan kuitenkin napakoordinaattien avulla käyttäen pintaintegraalien muuttujanvaihtotulosta. Tässä yhteydessä Jacobin determinantin käsite on keskeinen:

Määritelmä 8.4.1 Olkoon $f : U \to \mathbf{R}^2$ derivoituva avoimessa joukossa $U \subset \mathbf{R}^2$. Tällöin lukua

$$J_f(\overline{x}) := \begin{pmatrix} D_1 f_1(\overline{x}) & D_2 f_1(\overline{x}) \\ D_1 f_2(\overline{x}) & D_2 f_2(\overline{x}) \end{pmatrix} = D_1 f_1(\overline{x}) D_2 f_2(\overline{x}) - D_2 f_1(\overline{x}) D_1 f_2(\overline{x})$$

sanotaan kuvauksen f *Jacobin determinantiksi pisteessä* $\overline{x}$.

Esimerkki Olkoon $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, missä $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Tällöin

$$J_f(x, y) = (e^x \cos y)(e^x \cos y) - (-e^x \sin y)(e^x \sin y) = e^{2x}$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Seuraava muuttujanvaihtotulos todistetaan kirjassa Lehto: Differentiaali- ja integraalilaskenta II, s. 92:

Lause 8.4.2 Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu, $m(\partial A) = 0$, sekä olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva ja rajoitettu. Olkoon edelleen $g : R \to A$ jatkuvasti derivoituva bijektio, missä $R \subset \mathbf{R}^2$ on suorakulmio. Tällöin

$$\int_A f = \int_R (f \circ g)|J_g|.$$

Esimerkki 8.4.3 Tarkastellaan kuvausta

$$f(x, y) = (2x + 3y, 4x - 5y).$$

Olkoon R neliö, jonka kärkipisteet ovat $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ ja $(2, 2)$. Määrätään $m(f(R))$ pitäen tunnettuna, että f on bijektio. Nyt $D_1 f_1(x, y) = 2$, $D_2 f_1(x, y) = 3$, $D_1 f_2(x, y) = 4$ ja $D_2 f_2(x, y) = -5$, joten

$$J_f(x, y) = 2 \cdot (-5) - (3 \cdot 4) = -22.$$

Lauseen 8.4.2 mukaan

$$m(f(R)) = \int_{f(R)} 1 = \int_R |J_f| = 22m(R) = 22.$$

Huomaa, että

$$\frac{m(f(R))}{m(R)} = |J_f(1, 1)|$$

eli Jacobin determinantin itseisarvo kertoo ns. suurennussuhteen. Tämä ilmiö pätee yleisesti lokaalisti, ts. raja-arvon kautta, kun suorakulmiota pienennetään rajatta.

Lause 8.4.2 ei suoraan sovellu napakoordinaattimuunnokseen, koska kyseessä ei (aivan) ole bijektio. Kuitenkin pätee:

Lause 8.4.4 Olkoon $A = \overline{B}(\overline{0}, \delta) = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \delta^2 \}$ ja olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin

$$\int_A f = \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \right) dr, \tag{6}$$

missä r ja φ ovat napakoordinaatteja.

Todistus. Olkoon $g : [0, \delta] \times [0, 2\pi] \to A$ napakoordinaattikuvaus

$$g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Tällöin Jacobin determinantiksi saadaan

$$\begin{aligned} J_g(r, \varphi) &= D_1 g_1(r, \varphi) D_2 g_2(r, \varphi) - D_2 g_1(r, \varphi) D_1 g_2(r, \varphi) \\ &= \cos \varphi (r \cos \varphi) - (-r \sin \varphi) \sin \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

Olkoon

$$R = \{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq \delta, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

ja

$$R_\varepsilon = \{ (r, \varphi) \mid \varepsilon \leq r \leq \delta, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon \},$$

missä $0 < \varepsilon < \min(\delta, 2\pi)$. Koska $g : R_\varepsilon \to g(R_\varepsilon)$ on bijektio, saadaan Lauseen 8.4.2 nojalla

$$\int_{g(R_\varepsilon)} f = \int_{R_\varepsilon} (f \circ g) |J_g|.$$

Koska $J_g(r, \varphi) = r$, saadaan Lauseen 8.1.5 nojalla

$$\int_{R_\varepsilon} (f \circ g) |J_g| = \int_\varepsilon^\delta \left(\int_0^{2\pi - \varepsilon} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \right) dr.$$

Antamalla $\varepsilon \to 0^+$ saadaan pintaintegraalin konvergenssilauseen nojalla (jonka tarkastelu tässä sivuutetaan)

$$\begin{aligned} \int_A f &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{g(R_\varepsilon)} f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R_\varepsilon} (f \circ g) |J_f| \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\delta \left(\int_0^{2\pi - \varepsilon} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \right) dr. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 8.4.5 Esimerkiksi tapauksessa $f \equiv 1$

$$m(A) = \int_A 1 = \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) dr = \int_0^\delta 2\pi r \, dr = \pi \delta^2.$$

Jos taas $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, niin

$$\begin{aligned}
\int_A f &= \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \, d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} re^{r^2} \, d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^\delta 2\pi re^{r^2} \, dr = \pi \Big/_0^\delta e^{r^2} = \pi(e^{\delta^2} - 1).
\end{aligned}$$

Yleisesti, pintaintegraali yli origokeskisen pallon on usein helposti laskettavissa kaavalla (6) jos f on radiaalinen funktio eli f riippuu ainoastaan pisteen (x,y) normista $\sqrt{x^2+y^2}$.