

Analyysi III
2. harjoitus 2003

1. Olkoon

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{2x - 2}{x + 1}, x > 0\}.$$

Osoita, että 2 on joukon A supremum.

2. Olkoon $x_1 = 0$ ja $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 5$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$. Osoita, että jono (x_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Mikä on jonon raja-arvo?

3. Kirjoita 10 ensimmäistä alkioita rekursiivisesti määritellystä jonosta (x_n) , kun

a) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + 2^{-n},$

b) $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1},$

c) $x_1 = -2, x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+1}.$

Määritä raja-arvot, mikäli mahdollista.

4. Määritellään jono (x_n) rekursiivisesti asettamalla

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Osoita, että (x_n) on vähenevä. Mikä on raja-arvo?

5. Laske jonon (x_n) raja-arvo, kun

$$a) \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad b) \quad x_n = \frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

6. Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n)^{\frac{1}{n}}.$$