

**Analyysi III**  
**9. harjoitus 2003**

1. Osoita, että jono  $(f_n)$ ,

$$f_n(x) = nx(1-x)^n,$$

suppenee tasaisesti jokaisella välillä  $[a, 1] \subset ]0, 1]$ .

2. Tiedetään, että kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Osoita, että

a) suppeneminen on tasaista jokaisella rajoitetulla välillä,

b) suppeneminen ei ole tasaista millään rajoittamattomalla välillä.

3. Osoita Lauseen 4.4. avulla, että funktiojono  $(f_n)$ ,

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},$$

ei suppene tasaisesti välillä  $[0, 2]$ .

4. Olkoon

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

Suppeneeko jono  $(f_n)$  tasaisesti välillä  $[0, 1]$ ? Onko

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx?$$

5. Olkoon  $f_n(x) = nx^n(1-x)$  ja

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

välillä  $[0, 1]$ . Päteekö yhtälö

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

koko välillä  $[0, 1]$ .

6. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

tasaisesti välillä  $[2, \infty[$ ?

7. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$