

Analyysi III
11. harjoitus 2003

1. Mikä on sarjan

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde, kun

a) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2. Mikä on sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) (x-1)^n$$

suppenemisväli?

3. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-4)^n$ hajaantuu, kun $x = 7$ ja suppenee, kun $x = 1$. Mikä on sarjan suppenemisväli?

4. Tutki sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

suppenemista.

5. Integroi termeittäin rajojen 0 ja x välillä potenssisarja

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

suppenemisvälillään. Mikä on saadun sarjan summa? (Ohje: Tiedetään, että ylläolevan sarjan summa on $\ln(1+x)$.)

6. Osoita, että sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

summa s toteuttaa differentiaaliyhtälän

$$s''(x) - s(x) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.