

**Analyysi III**  
**5 . harjoitus 2004**

Laske seuraavat integraalit:

1.

$$\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

2.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.

$$\int_1^e x^3 \ln x dx$$

4.

$$\int_0^1 \overline{\arctan} x dx$$

5. Osoita raja-arvon  $\infty$  määritelmän nojalla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 2} = \infty.$$

6. Olkoon  $x_n = \sin(n + \frac{1}{2})\pi$ . Suppeneeko jono  $(x_n)$ ? Suppeneeko osajono  $(y_k) = (x_{n_k})$ , kun a)  $n_k = 2k$ , b)  $n_k = 3k$ , c)  $n_k = k^2$ , d)  $n_k = 2^k$ ?

7. Määritellään jono  $(x_n)$  rekursiivisesti asettamalla

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Osoita, että  $(x_n)$  on vähenevä. Mikä on raja-arvo?

8. Jonolle  $(x_n)$  on voimassa

$$|x_{n+1} - x_n| < cq^n,$$

$n = 1, 2, \dots$ , missä  $c$  ja  $q$  ovat vakioita ja  $0 < q < 1$ . Osoita, että jono suppenee.