

**Analyysi III**  
**7. harjoitus 2004**

1. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

suppenee, kun  $0 \leq x < 1$ , ja hajaantuu, kun  $x \geq 1$ .

2. Oletetaan, että positiiviterminen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

suppenee. Osoita, että myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

suppenee.

(Ohje: Oletuksesta seuraa, että suurilla  $n$ :n arvoilla  $x_n < 1$  (miksi?). Vertaile lukuja  $x_n$  ja  $x_n^2$ .)

3. Tutki sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+10}}$$

suppenemista.

4. Tutki sarjan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

suppenemista.

5. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+3}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+n+1}.$$

6. Tutki sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$$

suppenemista.