

Analyysi III
9. harjoitus 2004

1. Tutki seuraavista sarjoista, suppenevatko ne itseisesti, tavallisessa mielessä vai hajaantuvatko ne

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}, \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2}.$$

2. Olkoon $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ itseisesti suppeneva sarja ja (a_n) rajoitettu lukujono. Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ suppenee itseisesti.

3. Järjestä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

termit siten, että sarja hajaantuu.

4. Osoita, että jono (f_n) ,

$$f_n(x) = (\sin x \cos x)^n,$$

suppenee tasaisesti koko \mathbb{R} :ssä.

5. Osoita, että jono (f_n) ,

$$f_n(x) = nx(1-x)^n,$$

suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[a, 1] \subset]0, 1]$.

6. Tiedetään, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Osoita, että

- a) suppeneminen on tasaista jokaisella rajoitetulla välillä,
- b) suppeneminen ei ole tasaista millään rajoittamattomalla välillä.