

**Analyysi III**  
**10. harjoitus 2004**

1. Osoita Lauseen 4.1.4. avulla, että funktiojono  $(f_n)$ ,

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}},$$

ei suppene tasaisesti välillä  $[0, 2]$ .

2. Olkoon

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

Suppeneeko jono  $(f_n)$  tasaisesti välillä  $[0, 1]$ ? Onko

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx?$$

3. Olkoon  $f_n(x) = nx^n(1 - x)$  ja

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

välillä  $[0, 1]$ . Päteekö yhtälö  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  koko välillä  $[0, 1]$ .

4. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

tasaisesti välillä  $[2, \infty[$ ?

5. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

tasaisesti välillä  $]1, \infty[$ ?

6. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

suppenee tasaisesti arvoilla  $x \geq m > 0$ . (Ohje: käytä Leibnizin lausetta.)