OHEISMATERIAALIA ANALYYSI IV - KURSSILLE

MARKO KOTILAINEN

Aluksi

Tämä oheismateriaali on tarkoitettu luennoilla esitettävää teoriaa täydentäväksi informaation lähteeksi, jonka tarkoitus on omalta osaltaan tasoittaa analyysin kurssien uudistamisesta johtuvia opiskelijakohtaisia eroja esitiedoissa. Toinen tarkoitus on tarjota riittävästi materiaalia innokkaimpien opiskelijoiden tiedon janoon, oheismateriaaliin painettuja asioita ei vaadita osattavaksi tentissä, mikäli siitä ei luennolla erikseen mainita. Oheismateriaalia jaetaan demonstraatioissa, joissa tärkeimmät esimerkit voidaan käydä läpi ohjaajan kanssa.

1. Peruskäsitteitä

Määritelmä 1.1. (Vektoriavaruus) Olkoon $\mathbb{F}$ kunta ja V epätyhjä joukko, jossa on määritelty yhteenlasku $x+y : V \times V \to V$ ja skalaarilla kertominen $\alpha x : \mathbb{F} \times V \to V$ kaikilla $x, y \in V$ ja $\alpha \in \mathbb{V}$. Tällöin V on $\mathbb{F}$-kertoiminen *vektoriavaruus*, jos kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ja $x, y, z \in V$ pätee

(a) $x + y = y + x$ sekä $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(b) on olemassa sellainen yks. käs. *nollavektori* $\mathbf{0} \in V$, jolle $x + \mathbf{0} = x$,
(c) on olemassa sellainen yks. käs. $-x$, että $x + (-x) = 0$,
(d) $1x = x$ ja $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
(e) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ sekä $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Määritelmä 1.2. Olkoon V vektoriavaruus. Epätyhjä joukko $U \subset V$ on joukon V *lineaarinen aliavaruus* (tai *vektorialiavaruus*), jos U on itse vektoriavaruus, jolla on sama vektorien yhtenlasku ja skalaarilla kertominen kuin vektoriavaruudessa V.

Seuraava lause jätettiin luennoissa harjoitustehtäväksi:

Lause 1.3 (Aliavaruustesti)**.** *Olkoon V $\mathbb{F}$-kertoiminen vektoriavaruus ja olkoon $U \subset V$ epätyhjä joukko. Silloin U on avaruuden V lineaarinen aliavaruus , jos ja vain jos*

$$\alpha x + \beta y \in U \text{ kaikilla } x, y \in U \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

Todistus.

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että U on lineaarinen aliavaruus, eli itsekin vektoriavaruus. Valitaan vektorit $x, y \in U$ ja skalaarit $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ mielivaltaisesti. Vektoriavaruuden määritelmässä vaaditaan, että skalaarilla kertominen on kuvaus $\mathbb{F} \times U \to U$, eli $\alpha x \in U$ ja $\beta y \in U$. Edelleen yhteenlasku on kuvaus $U \times U \to U$, joten

$$\underbrace{\alpha x}_{\in U} + \underbrace{\beta y}_{\in U} \in U$$

Siis $\alpha x + \beta y \in U$ kaikilla $x, y \in U$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

"$\Leftarrow$" Tässä on enemmän vaivaa. Oletetaan, että $\alpha x + \beta y \in U$ kaikilla $x, y \in U$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, jolloin yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat halutunlaisia kuvauksia. Tehtävänä on osoittaa , että määritelmän 1.1 ehdot (a)-(e) toteutuvat.

Ehdot (a), (d) ja (e) toteutuvat, koska V on vektoriavaruus, ja kaikki joukon U alkiot sisältyvät joukkoon V. Ehdosta (e) seuraa, että

$$x + (-1)x = (1-1)x = 0 \cdot x$$

Oletuksen mukaan siis $0x$ kuuluu joukkoon U kaikilla x. Edelleen ehdoista (d) ja (e) seuraa

$$x + 0x = 1x + 0x = (1+0)x = x$$

Siis jokaisella $x \in U$ on nolla-alkio joukossa U. Koska nolla-alkio on yksikäsitteinen avaruudessa V, on myös U:n nolla yksikäsitteinen ja ehto (b) toteutuu. Ehdon (c) osoittamiseksi todetaan jälleen oletuksen nojalla, että $\mathbf{0} + (-1)x \in U \ \forall x \in U$. Koska ehtojen (a) ja (d) nojalla pätee

$$x + (\mathbf{0} + (-1)x) = (x + \mathbf{0}) + (-1)x = x + (-1)x = 0x = \mathbf{0}$$

on jokaisella joukon U alkiolla käänteisalkio. Yksikäsitteisyys seuraa taas vektoriavaruuden V ominaisuuksista.

$\square$

Esimerkki 1.4. Lukujonot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, missä $x_i \in \mathbb{F}$, muodostavat $\mathbb{F}$-kertoimisen vektoriavaruuden V, kun se varustetaan yhteenlaskulla

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

ja skalaarilla kertomisella

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \ldots).$$

Voit helposti tarkastaa vektoriavaruuden ehdot (a)-(d) mielessäsi; Kaikki perustuu siihen, että $\mathbb{F}$ (joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) on kunta, joten ehdot toteutuvat komponenttitasolla. Nollavektori on tietysti $(0, 0, 0, \ldots)$ ja $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3, \ldots)$.

Tämä jonoavaruus V on *ääretönulotteinen*, sillä vektorit

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\
e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\
e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots \\
e_i &= (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{:s luku}}, 0, 0, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Koska jokainen jonoavaruuden alkio $\mathbf{x} \in V$ voidaan lausua muodossa

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \qquad \text{(joukon } \{e_1, e_2, \ldots\} \text{ lineaarikombinaatio)} \tag{1.1}$$

virittävät vektorit e_j avaruuden V. Tämän voi ilmoittaa lyhyesti merkinnällä (”*span*”) $\mathrm{Sp}\{e_j | j \in \mathbb{N}\} = V$. Lineaarisesta riippumattomuudesta johtuen kohdan (1.1) esitys on yksikäsitteinen, joten joukko $\{e_j | j \in \mathbb{N}\}$ on kanta (nk. *standardikanta*).

∞-ulotteisuus näkyy siis siinä, että on löydettävissä lineaarisesti riippumaton joukko, jossa on äärettömän monta alkiota. Toisaalta mikään äärellinen vektoriporukka ei riitä virittämään tuota avaruutta, voidaan aina keksiä alkio avaruudesta V, jota ei saada äärellisen joukon lineaarikombinaationa.

Esimerkki 1.5. Eräs esimerkissä 1.4 kuvatun jonoavaruuden V lineaarinen aliavaruus on

$$l^1 := \left\{ (z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \right\},$$

jonka muodostavat siis sellaiset kompleksilukujonot, joiden alkioden modulien loputon summaaminen muodostaa suppenevan sarjan. Olkoon $x, y \in l^1$, jolloin näiden summa on

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

ja se kuuluu avaruuteen l^1, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|}_{<\infty} < \infty.$$

Olkoon lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$, jolloin

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots) \in l^1,$$

sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

Toisin sanoen

$$x, y \in l^1, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in l^1$$

ja lauseen 1.3 mukaan l^1 on vektori(ali)avaruus.

Tutustu tähdellä (*) merkittyihin esimerkkeihin 1.6 ja 1.7 halutessasi:

***Esimerkki 1.6.** Jos edellisessä esimerkissä jäi kummastuttamaan merkinnän l^1 eksponentissa oleva ykkönen, niin määritellään yleisemmin

$$l^p := \left\{ (z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p < \infty \right\}.$$

Joukko l^p on vektoriavaruus arvoilla $p \geq 1$, osoittaminen tapahtuu kuten edellä. Tapauksessa $p > 1$ vaaditaan tosin lisäperusteluja epäyhtälön

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$$

paikkansa pitävyyteen. (Sivuutetaan, ei HT!) Myöhemmin osoitetaan : $l^p \subset l^q$, kun $0 \leq p < q$.

***Esimerkki 1.7.** Vektoriavaruuksia ovat myös

$$\begin{aligned} l^\infty &:= \left\{ (z_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \exists\, M > 0 \text{ s.e. } |z_n| \leq M \;\forall n \in \mathbb{N} \right\} \\ c &:= \left\{ (z_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \lim_{n\to\infty} z_n \right\} \\ c_0 &:= \left\{ (z_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Heti huomataan, että $l^p \subset l^\infty$ ja $c_0 \subset c \subset l^\infty$.

Esimerkki 1.8. Olkoon $f_1, f_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ derivoituvia kuvauksia (Δ on reaalilukuväli tai $\mathbb{R}$). Silloin lineaarisen riippuvuuden osoittamiseksi voidaan käyttää Wronskin determinanttia

$$W_{f_1,f_2}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

(Lineaarialgebran kurssilla opetettu, otaksun). Siis jos

$$W_{f_1,f_2}(x) \neq 0$$

jollekin $x \in \Delta$, on joukko $\{f_1, f_2\}$ silloin lineaarisesti riippumaton. Tämä ei kuitenkaan takaa, että rajoittumat $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olisivat keskenään lineaarisesti riippumattomat.

Olkoon

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_1(x) = \sin(\pi x) \tag{1.2}$$

$$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_2(x) = x, \tag{1.3}$$

jolloin $f_1(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja joukko $\{f_1, f_2\}$ ei ole lineaarisesti riippumaton. Silti

$$W_{f_1,f_2}(x) = \begin{vmatrix} \sin(\pi x) & x \\ \pi\cos(\pi x) & 1 \end{vmatrix} = \sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)$$

on nollasta eroava vaikkapa arvolla $x = 2$. Mikä menee pieleen?

Siis ehto

$$\sum_{j=1}^{2} \lambda_j f_j(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

on vahvempi kuin ehto

$$\sum_{j=1}^{2} \lambda_j f_j(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{N}.$$

Ensimmäisestä seuraa $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, mutta toisesta ei.

***Esimerkki 1.9.** Funktioavaruus

$$C(0,1) := C([0,1]) := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$$

on ∞-ulotteinen. Tämän näet osoittamalla joukon $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, missä

$$f_j(x) = x^{j-1},$$

vapaaksi (l. lin.rtomattomaksi) kaikilla $n \in \mathbb{N}$.