2. Metrinen avaruus on topologinen avaruus

Määritelmästä 1.15 nähdään, kuinka metriikka indusoi topologian (eli määrittelee avoimet joukot) vektoriavaruuteen. Avaruus, jossa avoimet joukot eli topologia on määritelty, on *topologinen avaruus*. Topologia voidaan määritellä myös yleisemmin ilman metriikkaa, jolloin tuloksena on mielenkiintoista matemaattista analyysiä ”ilman epsilonia ja deltaa”. Tarkastelu perustuu Ilpo Laineen kirjoittamaan topologian kurssin luentomateriaaliin.

2.1. **Joukko-opin kertausta.** Olkoon X epätyhjä joukko. Tällöin *potenssijoukko* $\mathcal{P}(X)$ on sellainen joukkojen joukko, joka sisältää kaikki mahdolliset joukon X osajoukot. Siis

$$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$$

tai selkeämmin

$$A \in \mathcal{P}(X), \text{ jos ja vain jos } A \subset X.$$

Joukko X on myös itsensä osajoukko ja suurin mahdollinen joukko tässä muodostelmassa, joten sitä kutsutaan *perusjoukoksi*. Erityisesti tyhjä joukko $\emptyset \subset X$, joten $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$. Nimitys ”potenssijoukko” liittyy siihen, että jos perusjoukko X sisältää n erillistä alkiota, niin potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ sisältää 2^n alkiota (joukkoa).

Esimerkki 2.1. Olkoon $X = \{a, b, c\}$. Silloin

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Muistathan vielä nämä joukko-opin asiat:

Jos *indeksijoukon* I $(\neq \emptyset)$ jokaista alkiota $\alpha \in I$ vastaa eräs joukko U_α, sanotaan, että $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ on *indeksoitu joukkokokoelma.*

Indeksoitujen joukkojen yhdiste ja leikkaus määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha &= \{x \mid x \in U_\alpha \text{ ainakin yhdelle } \alpha \in I\} \\ \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha &= \{x \mid x \in U_\alpha \text{ jokaiselle } \alpha \in I\} \end{aligned}$$

Jos $I = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, merkitään usein $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$

Jos $I = \mathbb{N}$, merkitään tutusti $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$

Edellä mainitut ovat yleisimmät, mutta indeksijoukko I ei aina välttämättä ole numeroituva, voi olla esim. $I = \mathbb{R}$.

Joukkojen *erotus* $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ lienee muistissa. Olkoon X perusjoukko. Joukon A *komplementti* on tällöin $X \setminus A$.

Lause 2.2 (De Morgan)**.**

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha) \\ X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha) \end{aligned}$$

Todistus. Helppo, kun sitä vähän miettii. □

2.2. **Topologinen avaruus.**

Määritelmä 2.3. Olkoon X epätyhjä joukko. Potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ osajoukko $\mathcal{T}$ on *topologia* joukossa X, jos

(i) $X \in \mathcal{T}$ ja $\emptyset \in \mathcal{T}$,
(ii) $U_1 \in \mathcal{T}$ ja $U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \bigcap U_2 \in \mathcal{T}$,
(iii) $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$ on indeksoitu joukkokokoelma ja $U_\alpha \in \mathcal{T}$ jokaiselle $\alpha \in I$, niin
$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Abstraktissa topologiassa siis valitaan ensin jokin määritelmän 2.3 ehdot (i)-(iii) täyttävä joukkokokoelma $\mathcal{T}$ ja sen sisältämiä joukkoja kutsutaan sitten perusjoukon X *avoimiksi* joukoiksi eli nyt

$$U \quad \text{on avoin, jos ja vain jos } U \in \mathcal{T}$$

Pari $(X, \mathcal{T})$ on tällöin *topologinen avaruus.*

Esimerkki 2.4. Topologioita ovat

(i) Triviaalitopologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
(ii) Diskreetti topologia $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$
(iii) Joukkokokoelma $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, kun perusjoukkona on $X = \{a, b, c\}$. Vastaavasti kokoelma $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, X\}$ ei ole topologia joukossa X. Miksi?
(iv) Metriikan d indusoima topologia metrisessä avaruudessa $(\mathcal{M}, d)$. Se määritellään kokoelmana $\mathcal{T}$, johon kuuluvat joukot $\emptyset, \mathcal{M}$, sekä kaikki joukot $U \subset \mathcal{M}$, jotka toteuttavat ehdon
Jokaista $x \in U$ vastaa $r > 0$ siten, että ympäristö $B_d(x, r) \subset U$.

Esimerkissä 2.4 esitetyt väittämät jätetään lukijan todistettavaksi. Huomattavaa on kuitenkin se, että metrinen avaruus on aina metriikan indusoimalla topologialla varustettu topologinen avaruus, mutta topologinen avaruus voi esiintyä myös ilman metriikkaa. Metriikan indusoimasta topologiasta tutut käsitteet voidaan yleistää myös muihin topologioihin:

Määritelmä 2.5. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus.

(i) Joukko $A \subset X$ on *suljettu*, jos $X \setminus A$ on avoin (eli $\in \mathcal{T}$)
(ii) Piste x on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokaiselle avoimelle joukolle $U \ni x$ pätee $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Lause 2.6. *Joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasaantumispisteensä.*

Todistus. Olkoon A suljettu ja x joukon A kasaantumispiste. Oletetaan, että $x \notin A$. Tällöin $x \in X \setminus A$, joka on sellainen avoin joukko, että

$$(X \setminus A) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

Tämä on ristiriita, siis $x \in A$.

Oletetaan toisaalta, että A sisältää kaikki kasaantumispisteensä. Merkitään jatkossa lyhyemmin $C := X \setminus A$ ja osoitetaan, että C on avoin. Olkoon $x \in C$. Koska $x \notin A$, x ei ole joukon A kasaantumispiste, ts. on olemassa avoin joukko $U \ni x$ s.e. $U \cap (A \setminus \{x\}) = U \cap A = \emptyset$, ts. $U \subset C$. Edellä olevassa tarkastelussa voidaan $x \in C$ valita mielivaltaisesti, joten jokaista $x \in C$ vastaa sellainen avoin joukko $U(x)$, että $x \in U(x) \subset C$. Tällöin

$$C = \bigcup_{x \in C} \{x\} \subset \bigcup_{x \in C} U(x) \subset C\,,$$

mistä seuraa

$$C = \bigcup_{x \in U} U(x).$$

Koska jokainen $U(x)$ on avoin, on C indeksoituna avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Siis $C = X \setminus A$ avoin, eli A suljettu. $\square$

Seuraava määritelmä täydentää luennolla esitettyä määritelmää 1.15 metriikan määräämässä topologiassa:

Määritelmä 2.7. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Määritellään joukkoperhe

$$\mathcal{F}_A = \{F \subset \mathcal{M} \mid F \text{ on suljettu ja } A \subset F\},$$

johon kuuluvat kaikki ne suljetut joukot, jotka sisältävät joukon A. Joukon A *sulkeuma* on tällaisten leikkaus, eli

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F.$$

Joukko A on *tiheä* joukossa X, jos $\overline{A} = X$.

Jos $\mathcal{F}$ on perhe suljettuja joukkoja, niin $\{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$ on perhe avoimia joukkoja. Topologian määritelmän mukaan avoimien joukkojen indeksoitu yhdiste on avoin ja De Morganin lain (Lause 2.2) mukaan

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

Tämän vuoksi sulkeuma $\overline{A}$ on aina suljettu.

Kun edellä olevassa tarkastelussa korvataan perhe $\mathcal{F}$ millä tahansa suljettujen joukkojen indeksoidulla joukkokokoelmalla, saadaan seuraava lause:

Lause 2.8. *Suljettujen joukkojen indeksoitu leikkaus on aina suljettu.*

Jos V on suljettu joukko, joka sisältää joukon A, pätee silloin $V \in \mathcal{F}$, joten

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F \subset V$$

Siis sulkeuma $\overline{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A.