3. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompaktit osajoukot

Luennolla on todistettu mm.

Lause 3.1 (Bolzano-Weierstrassin lause). *Kompaktin avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on ainakin yksi kasaantumispiste.*

Tämän lisäksi luennolla on todistamatta käytetty hyväksi seuraavaa tulosta:

Lause 3.2 (B-W eräs muoto). *Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu ja sisältää äärettömän monta alkiota, on olemassa ainakin yksi joukon A kasaantumispiste $x \in \mathbb{R}^n$.*

Ensiksi tulisi mieleen osoittaa, että rajoitettu ja suljettu joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti. Tätä tulosta kutsutaan nimellä *Heine-Borelin lause*. Tästä seuraa, että rajoitettu joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on relatiivikompakti, ts. sen sulkeuma on kompakti. Käyttämällä tämän jälkeen lausetta 3.1 tulisi lause 3.2 osoitettua.

Tässä menettelyssä on kuitenkin sellainen pulma, että lausetta 3.2 tarvitaan Heine-Borelin lauseen todistamiseksi. Kehäpäätelmää vältettäessä joudutaan siis todistamaan lause 3.2 ilman vippaskonsteja. Otetaan kuitenkin ensin valaiseva esimerkki siitä, miksi kompaktin joukon tulee olla rajoitettu.

Esimerkki 3.3. Pallot $B_d(0,r)$ muodostavat metriikalla (euklidinen etäisyys) d,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2} = ||x-y||$$

varustetussa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ avoimen peitteen mille tahansa joukolle $K \subset \mathbb{R}^n$. Jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, ts. on olemassa sellainen $M > 0$, että $||x|| < M$ kaikilla $x \in K$, niin peitteestä $\{B(0,r) \mid r > 0\}$ voidaan valita äärellinen osapeite. Itse asiassa pallo $B(0,M)$ yksin riittää peittämään joukon K. Tästä ei pidä vetää sitä johtopäätöstä, että rajoitettu joukko olisi kompakti; Kompaktisuuteen vaaditaan, että **jokainen** peite sisältää äärellisen osapeitteen. Tässä on vasta huomattu, että yksi peite sisältää äärellisen osapeitteen. Jos taas K ei ole rajoitettu, mikään peitteen $\{B(0,r) \mid r > 0\}$ äärellinen osa ei peitä joukkoa K. Tästä nähdään, että ei-rajoitettu joukko avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ei ole kompakti.

Nyt hommiin, ja todistamaan lausetta 3.2. Todistus kannattaa miettiä kerran kunnolla läpi ja sitten vain uskoa se. Ja jos nyt ihan totta puhutaan, niin todistus on kopsattu vanhan analyysi 4:n luennoista.

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ äärettömän monta alkiota sisältävä ja rajoitettu, ts. $A \subset B(0,r)$ jollekin $r > 0$. Määritellään *n-ulotteinen suljettu väli*

$$\mathcal{J}^1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \bigm| -r \le x_k \le r,\ k = 1, \dots, n\}$$

Tällöin $A \subset B(0,r) \subset \mathcal{J}^1$. Kirjoitetaan vielä

$$\mathcal{J}^1 = I_1^1 \times I_2^1 \times \dots \times I_n^1,$$

missä jokainen I_k^1 tarkoittaa suljettua väliä $[-r, r]$. Puolitetaan jokainen väli I_k^1:

$$I_{k,1}^1 = [-r, 0] \quad I_{k,2}^1 = [0, r]$$

Tarkastellaan kaikkia karteesisia tuloja

$$I_{1,l_1}^1 \times I_{2,l_2}^1 \times \dots \times I_{n,l_n}^1$$

missä $l_i \in \{1, 2\}$. Näitä n-ulotteisia suljettuja välejä on 2^n kpl. Näiden 2^n välien yhdiste on alkuperäinen väli $\mathcal{J}^1$, joten jokin niistä sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. Olkoon

$$\mathcal{J}^2 = I_1^2 \times I_2^2 \times \ldots \times I_n^2$$

sellainen väli. Silloin I_k^2 on toinen välin I_k^1 puolikkaista, joten sen pituus on r. Menetellään karteesisen tulon $\mathcal{J}^2$ kanssa kuten edellä välin $\mathcal{J}^1$ kanssa, jolloin päädytään väliin

$$\mathcal{J}^3 = I_1^3 \times I_2^3 \times \ldots \times I_n^3,$$

joka sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. Jokaisen välin $I_k^3 \subset I_k^2$ pituus on $r/2$. Näin saadaan numeroituva kokoelma n-ulotteisia välejä

$$\mathcal{J}^1 \subset \mathcal{J}^2 \subset \mathcal{J}^3 \subset \ldots$$

joista jokainen sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. Merkitään

$$\mathcal{J}^m = I_1^m \times I_2^m \times \ldots \times I_n^m$$

muistaen

$$I_k^m \subset I_k^{m-1}$$

ja edelleen merkitään

$$I_k^m = [a_k^m, b_k^m]$$

kun

$$I_k^1 = [-r, r].$$

Näillä merkinnöillä

$$b_k^m - a_k^m = \frac{2r}{2^{m-1}} \tag{3.1}$$

Lisäksi on luonnollista, että jono $a_k^1, a_k^2, \ldots$ on kasvava, sekä jono $b_k^1, b_k^2, \ldots$ on vähenevä (ei aidosti!) jokaisella arvolla $k = 1, \ldots, n$. Yhtälön (3.1) mukaan täytyy jokaisella arvolla k päteä myös

$$\sup_{m \geq 1} a_k^m = \inf_{m \geq 1} b_k^m.$$

Olkoon

$$y_k = \sup_{m \geq 1} a_k^m = \inf_{m \geq 1} b_k^m$$

ja

$$y = (y_1, \ldots, y_n)$$

Nyt väitämme, että y on joukon A kasaantumispiste. Olkoon $B(y, \varepsilon)$ jokin pisteen y ympäristö (pallo). Koska $y \in \mathcal{J}^m$, kun $m = 1, 2, \ldots$ (kuuluu jokaiseen..) on

$$\mathcal{J}^m \subset B(y, \varepsilon)$$

kun m on riittävän suuri. Esim. voidaan valita m sen verran suureksi, että joukon $\mathcal{J}^m$ halkaisija on

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k^m - a_k^m)^2} = \sqrt{n \left(\frac{2r}{2^{m-1}} \right)} < \varepsilon$$

Tällöin palloympäristö $B(y, \varepsilon)$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä (yksikin $\neq y$ olisi riittänyt, vai olisiko?) eli y on joukon A kasaantumispiste. $\square$

Tehtävä. Käy läpi äskeinen todistus tapauksessa $n = 2$ ja piirtele kuvia.