4. Kuvauksen jatkuvuus riippuu topologiasta

Olkoot seuraavassa $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologisia avaruuksia.

Määritelmä 4.1. Funktio $f : X \to Y$ on *jatkuva pisteessä* $x \in X$, jos jokaista avointa joukkoa $V \ni f(x)$ vastaa avoin joukko $U \ni x$ siten, että $f(U) \subset V$.

Funktio on jatkuva joukossa X, jos se on jatkuva joukon X jokaisessa pisteessä.

Esimerkki 4.2. Olkoon X topologinen avaruus ja Y varustettu minitopologialla $\{\emptyset, Y\}$. Tällöin jokainen kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva, sillä jokaisella $x \in X$ ainut avoin joukko, joka sisältää pisteen $f(x)$, on Y. Lähtöavaruuden X topologiassa on perusjoukko X välttämättä avoin ja sille pätee $x \in X$ sekä $f(X) \subset Y$.

Seuraava lause karakterisoi funktion jatkuvuuden:

Lause 4.3. *Funktio $F : X \to Y$ on jatkuva, joss $f^{-1}(V)$ on avoin X:ssä aina, kun V on avoin Y:ssä.*

Todistus. Oletetaan ensin, että f on jatkuva. Olkoon $V \subset Y$ avoin. Jos $f^{-1}(V) = \emptyset$, pitää väite paikkansa. Jos $x \in f^{-1}(V)$ eli $f(x) \in V$, niin funktion f jatkuvuudesta seuraa, että on olemassa sellainen avoin joukko $U(x) \ni x$, että $f(U(x)) \subset V$. Tällöin $x \in U(x) \subset f^{-1}(V)$. Siis

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U(x) \subset f^{-1}(V)$$

eli $f^{-1}(V)$ on avoin avoimien joukkojen yhdisteenä.

Oletetaan toisaalta, että $f^{-1}(V)$ on avoin aina, kun V on avoin. Olkoon $x \in X$ mv. ja $V \ni f(x)$ avoin. Tällöin $f^{-1}(V)$ on avoin ja

$$f^{-1}(V) \supset f^{-1}(f(x)) \ni x$$

Lisäksi $f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$, joten jokaista avointa joukkoa $V \ni f(x)$ vastaa sellainen avoin joukko $f^{-1}(V)$, että $f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$. Siis f on jatkuva. □

Esimerkki 4.4. Olkoon $X = \{a, b, c\}$ varustettu topologialla $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Tarkastellaan kysymystä, milloin kuvaus $f : X \to X$ on jatkuva. Lauseen 4.3 perusteella riittää tutkia, että maaliavaruuden avoimien joukkojen alkukuvat ovat avoimia. Siis kuvaus on jatkuva, jos alkukuvat

$$f^{-1}(\emptyset),\ f^{-1}(\{a\}),\ f^{-1}(X)$$

ovat avoimia. Ensimmäinen on tyhjä joukko (siis avoin) ja viimeinen on perusjoukko (avoin sekin). Kyseisessä topologiassa kuvaus joukolta itselleen on jatkuva, jos jokin seuraavista on totta:

- $f^{-1}(\{a\}) = \emptyset$ (mikään alkioista ei kuvaudu alkiolle a)
- $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ (a kuvautuu itselleen)
- $f^{-1}(\{a\}) = X$ (kaikki kuvautuvat alkiolle a)

Määritelmä 4.5. Joukon X osajoukko X' voidaan varustaa *indusoidulla topologialla*:

$$A \subset X' \text{ on avoin} \Leftrightarrow A = B \cap X',$$

missä B on avoin avaruuden X topologiassa.