

**Analyysi 5.**  
**Harjoitus 1.**

Tämän harjoituksen tehtävät 1-5 palautetaan torstaina 22.1.2004. Tehtävien ratkaisemisesta muodostuu 20% arvosanasta, identtisiä papereita ei hyväksytä. Tehtävien 6, 7 ja 8 käsitteet tulee selvittää ja mietiskellä mahdollisia ratkaisuideoita tai epäselvyyksiä. Lopullinen ratkaisu tehdään ohjattuina harjoituksina.

1. Osoita, että rajoittamattoman välin ulkomitta on sen geometrinen pituus.
2. Olkoon  $E = \left\{ 2 - (-1)^k \frac{n-2}{2n} \mid n, k \in \mathbb{N} \right\}$ . Mikä on  $\inf E$  ja  $\sup E$ ?
3. Olkoon  $\epsilon > 0$  ja joukko  $A \subset \mathbf{R}$  mielivaltainen. Osoita, että on olemassa avoin joukko  $B$  siten, että  $A \subset B$  ja  $m^*(B) \leq m^*(A) + \epsilon$ .
4. (a) Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$  ja  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Merkitään

$$\lambda + A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = \lambda + a, a \in A\}.$$

Osoita, että  $m^*(\lambda + A) = m^*(A)$ .

- (b) Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$  ja  $\alpha \geq 0$ . Jos

$$\alpha A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = \alpha y, y \in A\},$$

niin  $m^*(\alpha A) = \alpha m^*(A)$ .

5. Osoita, että jos joukkojen  $A \subset \mathbf{R}$  ja  $B \subset \mathbf{R}$  välinen etäisyys

$$\rho(A, B) = \min \{|x - y| \mid x \in A, y \in B\}$$

on aidosti positiivinen, pätee  $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ . Ohje osoita, että jokaiselle  $a > 0$  pätee

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \mid I_j \text{ avoin väli, } l(I_j) < a \text{ ja } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

6. Selvitä kirjallisuuden avulla, mikä on valinta-aksioma. Mitkä ominaisuudet ovat valinta-aksioman kanssa ekvivalentteja?
7. (a) Osoita, että välin  $I \subset \mathbf{R}$  irrationaalipisteiden joukko on ylinumeroituva.  
(b) Osoita, että irrationaalilukujen joukko on ylinumeroituva.  
(a) Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  ja olkoon  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  additiivinen eli  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  jokaiselle  $x, y \in A$ . Osoita, että on olemassa maksimaalinen joukko, johon funktio  $f$  voidaan laajentaa additiivisena.  
(b) Esitä ei-mitallinen joukko.