Analyysi 5.
Harjoitus 10.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-5 palautetaan kirjallisesti torstaina 1.4.2004. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. Olkoon $X = \{1,2,3,4\}$ ja $\mathcal{F}_1$ pienin σ-algebra, joka sisältää joukot $\{1,2\}$ja $\mathcal{F}_2$ pienin σ-algebra, joka sisältää joukon $\{2\}$? Mikä on $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$?

2. Olkoon $X = Y = [0,1]$ ja $\mu = \nu$ Lebesguen mitta. Osoita, että jokainen joukon $X \times Y$ avoin osajoukko on mitallinen ja edelleen jokainen Borelin joukko on mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mitallinen mittallisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$. Osoita, että jokaisen joukon $\mathbb{R}$ Borelin joukon alkukuva on mitallinen. Ohje: Osoita, että joukko $\{E \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(E) \text{ mitallinen}\}$ on σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot. Lisäksi määritelmän nojalla Borelin joukkojen joukko on pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot.

4. Olkoon $f(x)$ ja $g(y)$ integroituvua funktioita vastaavissa mitta-avaruuksissa $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Osoita, että $h(x,y) = f(x)g(y)$ on tulomitan $\mu \times \nu$ suhteen ja
$$\int h(x,y)\, d(\mu \times \nu) = \int f(x)\, d\mu \int g(y)\, d\nu.$$

5. Osoita, että
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dydx,$$
kun
$$f(x.y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

6. Osoita, että oletusta funktion f positiivisuudesta ei voida poistaa Tonellin lauseesta. Ohje: Olkoot $X = Y$ luonnollisten lukujen joukko ja $\mu = \nu$ siten, että
$$\mu(A) = \text{ joukon } A \text{ alkioiden lukumäärä.}$$
Valitaan
$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & \text{jos } x = y \\ -2 + 2^{-x}, & \text{jos } x = y + 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

7. Osoita edellisen tehtävän ohjeen avulla, ettei Fubinin lauseesta voida poistaa oletusta funktion f integroituvuudesta.

8. Laske
$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx,$$
missä integraali on Riemannin integraali ja
$$\|x\| = \|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$