Analyyysi 5.
Harjoitus 11.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-6 palautetaan kirjallisesti torstaina 15.4.2004. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. Olkoot $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-äärellisiä mitta-avaruuksia. Oletetaan, että $f : X \times Y \to [0, \infty]$ on mitallinen tuloavaruudessa $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$. Osoita, että funktiot $x \to \int f_x(y)\, d\nu(y)$ ja $y \to \int f^y(x)\, d\mu(x)$ ovat mitallisia.

2. Osoita, että Lebesguen mitta-avaruus $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ on Borelin mitta-avaruuden $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ harjoituksessa 7 esitetty täydennys ($\mathcal{B}$ reaalilukujen Borelin joukkojen joukko eli pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot) . Ohje: Käytä harjoitus 2 tehtävää 8.

3. Osoita, että Lebesguen mitta m reaalilukujen joukossa on ainoa mitta μ mitallisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, jolle pätee $\mu(]a, b[) = m(]a, b[) = l(]a, b[)$ jokaiselle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ohje: Käytä yksikäsitteisyyslausetta ja edellistä tulosta.

4. Laske pallon $B_r(0) = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1^2 + ... + x_n^2 \leq r^2\}$ tilavuus. Esitä vastauksesi Gamma-funktion $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx$ avulla.

5. Selvitä ovatko seuraavat funktiot Riemann tai Lebesgue integroituvia välillä $[0, \infty]$

   (a) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$,

   (b) $f(x) = e^{-x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

6. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$, joka on Riemann integroituva, mutta ei ole tulomitan $m \times m$ suhteen integroituva. Perustele vastauksesi.

7. Selvitä Borelin joukkojen luokan rooli mitta-teoriassa.

8. Osoita, että seuraava funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-y}{x-y}}, & \text{jos } 0 \leq y < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

   on Lebesguen integroituva joukossa $\mathbb{R}^2$ ja laske sen integraali. Onko f tavallisessa mielessä Riemann integroituva joukossa $[0, 1] \times [0, 1]$.

9. Olkoon $S_n(a) = \{(x_1, ..., x_n) \mid |x_1| + ... + |x_n| \leq a\}$. Osoita, että $m(S_n(a)) = a^n m(S_n(1)) = a^n 2^n / n!$.