Analyysi 5.
Harjoitus 2.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-7 palautetaan torstaina 29.1. Tehtävien 8, 9 ja 10 käsitteet tulee selvittää ja mietiskellä mahdollisia ratkaisuideoita tai epäselvyyksiä. Lopullinen ratkaisu tehdään ohjattuina harjoituksina.

1. Osoita, että jos $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, niin $a+E$ on mitallinen jokaiselle $a \in \mathbb{R}$. Ohje: Seuraa mitallisuuden määritelmästä ja tuloksesta $m^*(B) = m^*(a+B)$ jokaiselle $B \subset \mathbb{R}$.

2. Todista väite: Jos joukot $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$ ovat mitallisia, niin
$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

3. Oletetaan, että joukko $A \subset \mathbb{R}$ on mitallinen ja joukko $B \subset \mathbb{R}$ on ei-mitallinen s.e. $A \cap B = \emptyset$. Voiko joukko $A \cup B$ olla mitallinen?

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa Borelin joukko B, jolle pätee $A \subset B$ ja $m^*(A) = m(B)$.

5. Olkoon $1 > \varepsilon > 0$. Osoita, että on olemassa joukossa $[0,1]$ tiheä avoin joukko $E \subset [0,1]$, jolle pätee $m(E) = \varepsilon$. Huom: joukko E on tiheä joukossa $[0,1]$, jos joukon E sulkeuma (eli pienin suljettu, jonka osajoukko on E) on $[0,1]$.

6. Osoita, että $\mathcal{B}$ on Borelin joukkojen luokka joukossa X, jos ja vain jos $\mathcal{B}$ on pienin σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot.

7. Olkoon $X = \{1,2,3,4,5\}$. Mikä on pienin σ-algebra, joka sisältää joukot $A = \{1,2\}$ ja $B = \{2,4\}$? Esitä jokin mitta tässä σ-algebrassa.

8. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ joukko. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

   (i) Joukko E on Lebesgue-mitallinen,

   (ii) Jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $U \supset E$ s.e. $m^*(U \setminus E) < \epsilon$,

   (iii) Jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko $F \subset E$ s.e. $m^*(E \setminus F) < \epsilon$,

   (iv) On olemassa avoimet joukot G_i, $i \in \mathbf{N}$, s.e., $E \subset \bigcap_{i\in\mathbf{N}} G_i$ ja $m^*\left(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} G_i \setminus E\right) = 0$,

   (v) On olemassa suljetut joukot F_i, $i \in \mathbf{N}$, s.e., $E \supset \bigcup_{i\in\mathbf{N}} F_i$ ja $m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} F_i\right)\right) = 0$.

   Jos $m^*(E) < \infty$, niin ylläolevat ehdot ovat yhtäpitäviä seuraavan ehdon kanssa

   (vi) Jokaiselle $\epsilon > 0$, on olemassa äärellinen määrä avoimia välejä I_k, $k = 1, ..., n$, s.e.
   $$m^*\left(\left(\left(\bigcup I_k\right) \setminus E\right) \bigcup E \setminus \left(\bigcup I_k\right)\right) < \epsilon.$$

   Ohje: Katso Royden s. 62.

9. Määrittele ulkomitta yleisessä tapauksessa mielivaltaiselle joukolle X ja todista, että sen avulla saadaan täydellinen mitta.

10. Selvitä, mitä Carathéodoryn laajennuslause pitää sisällään.