Analyyysi 5.
Harjoitus 3.

Tämän harjoituksen tehtävät 1–6 palautetaan kirjallisesti torstaina 5.2.2004. Loput ohjatuissa harjoituksissa

1. Osoita, että joukko E on mitallinen mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jos ja vain jos karakteristinen funktio χ_E on mitallinen.

2. Oletetaan, että $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on mitallinen mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ja funktio $g : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ toteuttaa ehdon $f = g$ a.e.. Oletetaan lisäksi, että mitta μ on täydellinen (eli jokaiselle joukolle E ja F ehdoista $E \subset F$ ja $\mu(F) = 0$ seuraa, että joukko E on mitallinen). Osoita, että funktio g on mitallinen.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on Lebesgue mitallinen, jos ja vain jos joukko $f^{-1}(]q, \infty[)$ on mitallinen jokaiselle rationaaliluvulle q.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on Lebesgue mitallinen, jos ja vain jos jokaisen suljetun joukon alkukuva on mitallinen.

5. Selvitä, onko funktio $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue mitallinen, jos jokaiselle $a \in \mathbb{R}$ joukko $f^{-1}(\{a\})$ on mitallinen.

6. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Todista: Jos $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on kasvava jono mitallisia joukkoja, niin $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\cup E_n)$. Lisäksi jos $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on vähenevä ja $\mu(F_i) < \infty$ jollekin $i \in \mathbf{N}$, niin $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\cap E_n)$.

7. Anna esimerkki nollamittaisesta joukosta, joka on ylinumeroituva. Ohje: Olkoon $I = [0, 1]$. Merkitään $I_1^0 = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$. Jaetaan joukon $I \setminus I_1^0$ komponentit $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ja $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ kolmeen yhtäsuureen osaan ja merkitään keskimmäisiä avoimia välejä niistä I_1^1 ja I_2^1. Jaetaan edelleen joukon $I \setminus (I_1^0 \cup I_1^1 \cup I_2^1)$ komponentit kolmeen yhtäsuureen osaan ja merkitään keskimmäisiä avoimia välejä niistä I_1^2, I_2^2, I_3^2 ja I_4^2. Jatkamalla tätä prosessia saadaan jono avoimia välejä $\left(I_n^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ ja $n = 1, ..., 2^k$. Joukkoa $I \setminus \bigcup_{n,k} I_n^k$ sanotaan Cantorin joukoksi. Osoita, että Cantorin joukko on ylinumeroituva ja nollamittainen.

8. Osoita, että mitallisessa avaruudessa $(X, \mathcal{F})$ mitalliselle funktiolle $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ pätee

   (a) $|f|$ on mitallinen,

   (b) f^n on mitallinen.

9. Osoita, että $f : X \to \mathbb{R}$ on mitallinen mitallisessa avaruudessa $(X, \mathcal{F})$, jos ja vain jos jokaisen Borelin joukon alkukuva on mitallinen. Ohje: Osoita, että joukko

$$\left\{B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\right\}$$

   on σ-algebra.

10. Olkoot $(X, \mathcal{B})$ ja $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ mitallisia avaruuksia ja $f : X \to \mathbb{R}$ sekä $g : \mathbb{R} \to R$ mitallisia funktioita. Selvitä tarkasti, onko $f \circ g$ mitallinen aina vai jossain erikoistapauksissa?