Analyysi 5.
Harjoitus 4.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-6 palautetaan kirjallisesti torstaina 12.2.2004. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. Olkoot $f : X \to \mathbb{R}$ ja $g : X \to \mathbb{R}$ yksinkertaisia. Osoita, että $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ ja fg sekä $f + g$ ovat yksinkertaisia.

2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava. Osoita, että f on Lebesguen mitallinen mitta-avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. Todista myös, että vähenevä reaaliarvoinen funktio on mitallinen.

3. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Osoita, että jos mitalliselle funktiolle $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ integraali $\int f \, d\mu$ on olemassa, niin $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.

4. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ on mitta-avaruus. Osoita, että jos funktio $f : X \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja mitallinen, niin on olemassa jono yksinkertaisia funktioita, jotka suppenevat tasaisesti kohti funktiota f. Ohje: Lauseen 2.2.9 todistus.

5. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus.

   (a) Oletetaan, että $f : X \to [0, \infty]$ on mitallinen. Osoita, että jokaiselle mitalliselle joukolle E pätee
   $$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E \xi d\mu | \xi \leq f, \ \xi \text{ yksinkertainen} \right\}$$

   (b) Olkoon $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mitallinen. Osoita, että jos integraali $\int f d\mu$ on olemassa, niin integraali $\int_E f d\mu$ on olemassa jokaiselle mitalliselle joukolle E.

6. Jos funktio $f : X \to \mathbb{R}$ on derivoituva, niin f ja f' ovat mitallisia. Ohje: $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$.

7. Olkoon $s_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)$. Laske $\liminf_{n\to\infty} s_n$ ja $\limsup_{n\to\infty} s_n$.

8. Laske $\int f \, dm$, kun määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten,että
   $$f(x) = \begin{cases} -3, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & x \in [0, 4] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

9. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Oletetaan, että $E \in \mathcal{B}$. Merkitään $B_E = \{A \cap E | A \in \mathcal{B}\}$. Osoita, että $(E, \mathcal{B}_E, \mu)$ on mitta-avaruus. Mikä on $\int f \, d\mu$ mitta-avaruudessa $(E, \mathcal{B}_E, \mu)$?

10. Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ suljettu väli. Olkoon $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ välin I jako. Määritellään funktion $f : I \to \mathbf{R}$ heilahtelu asettamalla $S_D = \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ ja kokonaisheilahtelu $V_f I$ asettamalla $V_f I = \sup\{S_D | D \text{ välin } I \text{ jako}\}$. Funktioita $f : I \to \mathbf{R}$ sanotaan rajoitetusti heilahtelevaksi, jos $V_f I < \infty$.

    (a) Osoita, että $V_f([a, b]) + V_f([b, c]) = V_f([a, c])$, kun $a < b < c$.

    (b) Osoita, että $f : I \to \mathbf{R}$ on rajoitetusti heilahteleva, jos ja vain jos $f = u - v$, missä u ja v ovat kasvavia. Ohje: Osoita, että funktiot $V_f([a, x])$ ja $V_f([a, x]) - f(x)$ ovat kasvavia (a) kohdan avulla.