Analyyysi 5.
Harjoitus 5.

Tämän harjoituksen tehtävät 16 palautetaan kirjallisesti torstaina 19.2. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. (a) Osoita, että rajoitetusti heilahtelevalla funktiolla on korkeintaan numeroituva määrä epäjatkuvuuskohtia. Ohje: Rajoitetulla kasvavalla funktiolla voi olla hyppäyksiä, joiden pituus on vähintään α, äärellinen määrä.

   (b) Osoita, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

   $$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   on jatkua, mutta ei rajoitetusti heilahteleva.

   (c) Osoita, että jatkuvasti derivoituva funktio on rajoitetusti heilahteleva.

2. Joukoilla A ja B on sama mahtavuus, jos on olemassa bijektiivinen kuvaus joukolta A joukolle B. Joukon mahtavuus on ekvivalenssirelaatio. Joukon A määräämää ekvivalenssiluokkaa sanomme joukon A mahtavuudeksi ja merkitsemme $\operatorname{card} A$. Numeroituvan joukon mahtavuutta merkitsemme $\operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. Määritellään $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$, jos A on yhtä mahtava kuin jokin joukon B osajoukko. Voidaan todistaa, että $\operatorname{card} A < \operatorname{card}\mathcal{P}(A)$, missä $\mathcal{P}(A)$ on joukon A kaikkien osajoukkojen joukko. Yleistetyn kontinuumi hypoteesin mukaan ei ole olemassa joukkoa A siten, että $\operatorname{card}\mathbb{R} < \operatorname{card} A < \operatorname{card}\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Merkitään reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ei-mitallisten joukkojen joukkoa $\mathcal{E}$. Osoita yleistetyn kontinuumi

   hypoteesin avulla, että $\operatorname{card}\mathcal{E} = \operatorname{card}\mathcal{M}$,missä $\mathcal{M}$ on reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ Lebesguen mitallisten joukkojen joukko. Ohje: Käytä hyväksesi edellä mainittuja asioita ja Cantorin joukkoa ja Harjoituksen 2 tehtävää 3.

3. Osoita, että Fatoun lemmassa voi olla aito epäyhtälö. Ohje: Tutki funktioita $f_n(x) = 1$, kun $x \in [n, n+1[$ ja 0 muulloin.

4. Osoita, että on olemassa jono Lebesgue integroituvia funktioita f_n, jotka suppenevat kaikkialla kohti Lebesgue integroituvaa funktioita f, mutta

   $$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm < \int f dm.$$

5. Osoita, että lukujonolla $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on olemassa raja-arvo (ääretön tai äärellinen), jos ja vain jos

   $$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

6. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Osoita, että jos $f : X \to \mathbb{R}$ on integroituva, niin joukko $\{x \in X | f(x) > \alpha\}$ on äärellismittainen jokaiselle $\alpha > 0$.

7. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ei-negatiivinen ja jatkuva. Osoita, että jos $\int_{[a,b]} f dm = 0$, niin $f(x) = 0$ jokaiselle $x \in [a,b]$.

8. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ Lebesguen mitta-avaruus reaalilukujen joukossa. Olkoon $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ integroituva. Osoita, että funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_{]-\infty, x[} f dm$$
on jatkuva. Ohje: Käytä monotonista konvergenssilausetta.

9. Osoita, että jos f on integroituva joukossa E, niin $|f|$ on integroituva ja
$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

10. Olkoon funktio f reaaliarvoinen mitallinen mitta-avaruuden $(X, \mathcal{B}, \mu)$ äärellismittaisessa osajoukossa A ja
$$g_n = \frac{nf}{1 + n^2 f^2},$$
$n = 1, 2, ...$ Määrää
$$\lim_{n \to \infty} \int_A g_n d\mu.$$