Analyysi 5.
Harjoitus 6.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-7 palautetaan kirjallisesti torstaina 26.2.2004. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. Todista Lusinin lause: Jos f mitallinen reaaliarvoinen valillä $[a,b]$ määritelty funktio, jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa välillä $[a,b]$ jatkuva funktio g siten, että
$$m\left(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}\right) < \delta.$$
Ohje: Egoroffin lause, Lause 2.2.9 ja harjoitus 2.8.

2. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ Lebesguen mitta-avaruus. Olkoon funktio $f : E \to \mathbb{R}$ rajoitettu äärellismittaisessa joukossa E. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä
   (a) $\inf\left\{\int_E \psi dm \mid \psi \text{ yksinkertainen ja } \psi \geq f\right\} = \sup\left\{\int_E \phi dm \mid \phi \text{ yksinkertainen ja } \phi \leq f\right\}$.
   (b) funktio f on mitallinen.
   Ohje: ehdon (i) nojalla on olemassa yksinkertaisten funktioiden jonot (ϕ_n) ja (ψ_n) siten, että $\phi_n \leq \phi_{n+1} \leq f$ ja $\psi_n \geq \psi_{n+1} \geq f$ ja $\lim_n \int \phi_n dm = \lim_n \int \psi_n dm$.

3. Määritellään funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ joukossa $[0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^k}, & \text{kun } x = \frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n \\ (1-x)^n \sin x, & \text{muulloin} \end{cases}.$$
Suppeneeko funktiojono (f_n) melkein kaikkialla?

4. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ Lebesguen mitta-avaruus reaalilukujen joukossa. Olkoon $f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbf{R}$, missä $a < b$, $c < d$. Oletetaan, että jokaiselle $x \in]a,b[$ funktio $f(x,\cdot)$ on Lebesguen mitallinen ja on olemassa Lebesguen mitallinen funktion $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ siten, että $|f(x,y)| \leq g(y)$ jokaiselle x ja y. Olkoon $x_0 \in]a,b[$. Osoita, että jos funktio g on integroituva ja $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ on olemassa jokaiselle $y \in]c,d[$, niin
$$\lim_{x\to x_0} \int_{]c,d[} f(x,y)\, dm(y) = \int_{]c,d[} \lim_{x\to x_0} f(x,y)\, dm(y).$$

5. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ Lebesguen mitta-avaruus. Olkoot funktiot f ja g integroituvia joukossa $A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että jos
$$\int_E f dm = \int_E g dm$$
jokaiselle joukon A mitalliselle osajoukolle, niin $f = g$ melkein kaikkialla joukossa A. Milloin ehdosta $\int_A f dm = \int_A g dm$ seuraa, että $f = g$ melkein kaikkialla?

6. Laske integraali
$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$
Ohje: Apostol: Mathematical Analysis, p. 285.

7. Laske integraali

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

8. Olkoon f ei-negatiivinen mitallinen funktio. Määritellään funktiojono (f_n) asettamalla

$$f_n = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \leq n, \\ n, & \text{kun } f(x) = n \end{cases}$$

Osoita, että $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

9. Tutki seuraavien integraalien olemassaoloa epäoleellisena Riemann integraalina ja Lebesgue-integraalina.

   (a) $\int_1^{+\infty} \sin^2(1/x) dx$,

   (b) $\int_0^{+\infty} x^p e^{-x^q} dx$, kun $p > 0$ ja $q > 0$.

10. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ Lebesguen mitta-avaruus. Funktio g on mitallinen ja rajoitettu jokaisessa rajoitetussa joukon $\mathbb{R}$ osajoukossa ja funktiot $f_n, n \in \mathbf{N}$, on määritelty siten, että

$$f_n(x) = g(x) e^{-n|x|}.$$

Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \int_{]-r,r[} f_n dm = 0$$

jokaiselle $r > 0$. Mikä on raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n dm?$$

11. Olkoon f Lebesque integroituva joukossa $\mathbb{R}$. Jos $-\infty < a < b < \infty$, niin jokaiselle reaaliluvulle r pätee

$$\int_{[a,b]} f_r \, dm = \int_{[a+r,b+r]} f \, dm,$$

kun $f_r(x) = f(x + r)$.

12. Olkoon f integroituva funktio joukossa $\mathbb{R}$. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(nx) \, dx = 0.$$

Ohje: Todista väite ensin porrasfunktioille .