Analyysi 5.
Harjoitus 9.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-5 palautetaan kirjallisesti torstaina 26.3.2004. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. Etsi sellaisten Riemann integroituvien funktioiden (f_n) jono, että $\lim_n f_n$ on rajoitettu, mutta ei Riemann integroituva.

2. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus ja $(X, \mathcal{B}_c, \overline{\mu})$ sen laajennus täydelliseksi mitta-avaruudeksi. Osoita, että funktio $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{B}_c, \overline{\mu})$, jos ja vain jos on olemassa avaruudessa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitallinen funktio g, jolle pätee $f = g$ melkein kaikkialla mitan μ suhteen.

3. Olkoon $E \subset X \times Y$. Osoita, että

   (a) $((X \times Y) \setminus E)_x = Y \setminus E_x$,

   (b) $(\bigcup E_i)_x = \bigcup (E_i)_x$,

   (c) $(\bigcap E_i)_x = \bigcap (E_i)_x$.

4. Anna esimerkki Dynkin systeemistä, joka ei ole σ-algebra.

5. Olkoon $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (a) Mikä on pienin Dynkin systeemi, joka sisältää joukot $A = \{1, 2\}$ ja $B = \{2, 4\}$?

   (b) Mikä on pienin Dynkin systeemi, joka sisältää joukot A, B ja joukon $\{2\}$?

   (c) Mikä on pienin σ-algebra, joka sisältää joukot A, B ja joukon $\{2\}$? Vertaa Harjoitusten 2 tehtävään 7.

6. Todista ja esitä Radon-Nikodym lause etumerkkisille mitoille.

7. Olkoon m Lebesguen mitan rajoittuma joukkoon $[0, 1]$. Voidaanko edellisten harjoitusten tehtään 4 lukumäärämitta μ esittää muodossa $\mu = \mu_1 + \mu_2$, missä $\mu_1 \ll m$ ja $\mu_2 \perp m$? Voidaanko m esittää muodossa $m = m_1 + m_2$, missä $m_1 \ll \mu$ ja $m_2 \perp \mu$?

8. Onko olemassa mitallista funktiota f siten että $m(E) = \int f d\mu$, missä m on Lebesguen mitta välillä $[0, 1]$ ja μ tehtävän 7 mitta? Missä luennoilla esitetty todistus ei pelaa?

9. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Määritellään funktio $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ asettamalla $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{x_i}(A)$. Osoita, että μ on mitta. Milloin μ on σ-äärellinen? Osoita, että $\mu \perp m$.