Analyysi 5.
Harjoitus 8.

Tämän harjoituksen tehtävät 1-6 palautetaan kirjallisesti 18.3.2004. Muut tehtävät käsitellään harjoituksissa

1. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono mitallisia joukkoja. Osoita, että
$$\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu(A_k).$$
Lisäksi osoita, että jos μ on äärellinen, niin
$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu(A_k).$$
Ohje: Fatoun lemma.

2. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Oletetaan, että g ja $f_1, f_2, ..., f$ ovat mitallisia funktioita siten, että $|f_n| \leq |g|$ ja $|g|^p$ on μ-integroituva jollekin $p > 0$. Osoita, että jos $f_n \to f$ μ-melkein kaikkialla, niin $|f|^p$ on μ-integroituva ja
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

3. Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ-äärellinen mitta-avaruus ja ν joukossa $\mathcal{B}$ määritelty μ-jatkuva mitta. Tällöin Radon-Nikodym-lauseen nojalla on olemassa ei-negatiivinen mitallinen funktio f siten, että
$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$
jokaiselle $E \in \mathcal{B}$. Osoita, että jos mitalliselle funktiolla g on yllä oleva ominaisuus $\nu(E) = \int_E g d\mu$ jokaiselle $E \in \mathcal{B}$, niin $f = g$ μ-melkein kaikkialla.

4. Olkoon $X = [0, 1]$. Osoita, että funktio $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$
$$\mu(A) = \begin{cases} \text{joukoa } A \text{ alkioiden määrä,} & \text{jos } A \text{ on äärellinen} \\ \infty, & \text{jos } A \text{ on ääretön} \end{cases},$$
on mitta, joka ei ole σ-äärellinen.

5. Olkoon ν ja μ mittoja σ-algebrassa $\mathcal{B}$. Osoita, että
   (a) jos ν on mitta ja $\nu \ll \mu$ ja $\nu \perp \mu$, niin $\nu = 0$.
   (b) jos ν_1 ja ν_2 ovat mittoja ja $\nu_1 \perp \mu$ ja $\nu_2 \perp \mu$, niin $a\nu_1 + b\nu_2 \perp \mu$ jokaiselle $a, b \geq 0$.
   (c) jos ν_1 ja ν_2 ovat mittoja ja $\nu_1 \ll \mu$ ja $\nu_2 \ll \mu$, niin $a\nu_1 + b\nu_2 \ll \mu$ jokaiselle $a, b \geq 0$.

6. Olkoon $\mathcal{B}$ välin $[0,1]$ Lebesguen mitallisten joukkojen joukko. Osoita, että on olemassa ei-diskreetti mitta μ joukossa $\mathcal{B}$, joka on singulaarinen Lebesguen mitan m suhteen. Ohje: Käytä hyväksesi Cantorin joukkoa.

7. Määrittele kompleksiarvoinen mitta. Osoita, että jokaiselle kompleksiarvoiselle mittalle ν pätee $\nu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, missä $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ovat äärellisiä mittoja.

8. Osoita, että Radon-Nikodym lauseessa oletuksesta μ on σ-äärellinen ei voida luopua. Ohje: Tarkastele tehtävän 4 mittaa ja Lebesguen mittaa joukossa $[0,1]$.

9. Tehtävän 3 kaavan määräämää funktiota kutsutaan mitan ν Radon-Nikodym derivaataksi mitan μ suhteen. Merkitsemme $f = \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]$. Osoita, että

   (a) jos $\nu_1 \ll \mu$ ja $\nu_2 \ll \mu$, niin $v_1 + \nu_2 \ll \mu$ ja
   $$\left[\frac{d\left(v_1 + \nu_2\right)}{d\mu}\right] = \left[\frac{dv_1}{d\mu}\right] + \left[\frac{dv_2}{d\mu}\right].$$

   (b) jos $\nu \ll \mu \ll \lambda$, niin
   $$\left[\frac{dv}{d\lambda}\right] = \left[\frac{dv}{d\mu}\right]\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right].$$

   (c) jos $\nu \ll \mu$ ja $\mu \ll \nu$, niin
   $$\left[\frac{dv}{d\mu}\right] = \left[\frac{d\mu}{d\nu}\right]^{-1}.$$