Analyysi 5.

Sirkka-Liisa Eriksson ja Pasi Vahimaa
Joensuun yliopisto
PL 111
80101 Joensuu

Sisältö

Alkusanat

Tämä kurssi käsittelee Lebesguen integrointiteoriaa. Integrointiteorioita on karkeasti sanottuna kolme, joita voidaan kutsua pääkehittäjiensä mukaan Cauchyn, Riemannin ja Lebesguen teoria. Lukiossa ja analyysin ensimmäisillä kursseilla käsitellään tavallisesti Cauchyn teoriaa. Vuonna 1823 ilmestyneessä julkaisussaan Cauchy määritteli integraalin $\int_a^b f\,dx$ jatkuvalle funktiolle reaalilukuvälillä $[a,b]$. Riemann yleisti 1854 tämän integraalin rajoitetuille funktioille. Molemmissa teorioissa on yhteistä, että väli $[a,b]$ jaetaan äärelliseen määrään osavälejä jakopisteillä $x_1, x_2, ..., x_n$ ja integraali saadaan muotoa

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

(a_i reaaliluku) olevien ylä- ja alasummien avulla (asiaa käsitellään tarkemmin Luvussa 3.3). Väitöskirjassaan Lebesgue alkoi käsitellä uutta integraalia, joka on olemassa myös pahastikin epäjatkuville funktioille. Vuonna 1903 ilmestyneessä julkaisussaan hän esitti tarkemmin integraaliaan. Keskeinen idea on saada luoda ensiksi joukolle $E \subset [a,b]$ hyvä mitta (Lebesguen mitta). Sen jälkeen ylä- ja alasummat saadaan jakamalla väli $[a,b]$ äärelliseen määrään joukkoja $E_1, ..., E_n$ funktion f arvojoukon avulla. Ne ovat muotoa $\sum_{i=1}^{n} a_i m\left(E_i\right)$, missä a_i on reaaliluku ja $m\left(E_i\right)$ joukon E_i mitta.

Lebesguen teorian hyvä puoli on se, että sen avulla voidaan integroida hyvinkin huonosti käyttäytyviä funktioita. Lisäksi Lebesguen teoriassa voidaan todistaa voimakkaita integraalimerkin ja raja-arvon järjestyksen vaihtamistuloksia (konvergenssilauseita). Tarkemmin integrointiteorioiden historiaa ja miksi integrointiteoriat on kehitetty on esitetty lähteessä [5].

Tämä luentomoniste perustuu syksyllä 1993 ensimmäisen kirjoittajan pitämään kurssiin Analyysi 5. Moniste noudattaa Roydenin ideaa (katso [8]), jonka mukaan mittateoria ensin esitetään reaalilukujen joukossa ja sen jälkeen yleisissä joukoissa. Fubinin lauseen avulla saadaan tämän jälkeen mitta tuloavaruuksissa ja erityisesti n-ulotteisessa Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Viimeisessä luvussa on esitetty Rieszin esityslause lähtien liikkeelle Radonin mitasta.

Luvuissa 1–3 on pääosin lähteinä [8] ja [1]. Luvuissa 4–5 on lähteinä [8], [2] ja [9]. Viimeinen luku on mukaelma lähteistä [9], [3] ja [6].

Luentomonisteen kirjoittamisessa auttoivat aktiiviset kurssin Analyysi 5 opiskelijat. Erityisesti Heikki Niemeläinen monilla kysymyksillään paransi kurssin sisältöä.

Joensuussa 21.7.1994

Sirkka-Liisa Eriksson Pasi Vahimaa

Luku 1

Lebesguen mitta

1.1 Ulkomitta

Olisi hyvä, jos voisimme sanoa mielivaltaisesta joukosta, kuinka iso se on. Tämä tosin tuntuu hivenen omituiselta asialta. Kuinka esimerkiksi jostakin karvahattujen osajoukosta voisimme kertoa, kuinka iso se on? Silti usein on kätevää mitata jollain tavalla joukon kokoa. Erityisen tärkeää joukon mitan tietäminen on integroitaessa.

Tässä aluksi tarkastelemme, kuinka voisimme "mitata" jonkin reaalilukujen $\mathbb{R}$ osajoukon koon. Tätä varten tarvitsemme käsitteen *mitta*. Jotta tämä mitta vastaisi normaalia käsitystämme mitasta, olisi luonnollista asettaa mitalle seuraavat vaatimukset:

1. Joukon E mitta $m(E)$ on määritelty jokaiselle joukolle $E \subset \mathbb{R}$.

2. Jokaisen reaalilukuvälin mitta on sama kuin kyseisen välin pituus.

3. Jos joukot E_n ovat joukon $\mathbb{R}$ pistevieraita osajoukkoja, eli

$$E_n \cap E_m = \emptyset, \qquad \text{kun } n \neq m,$$

niin mitta on täydellisesti additiivinen:

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

4. Mitta m on invariantti siirrossa pitkin reaaliakselia, eli jos $a \in \mathbb{R}$ ja

$$a + E = \{a + x \mid x \in E\},$$

niin joukon $a + E$ mitta on sama kuin joukon E mitta:

$$m(a + E) = m(E).$$

Valitettavasti tällaisen mitan määritteleminen on mahdotonta (Katso Royden, s. 64). Jostakin edellä olevasta ehdosta on luovuttava. Tuntuu luonnollisimmalta luopua ehdosta (1). Eli vaadimme, että voimme edes joistakin joukoista sanoa, minkä mittaisia ne ovat. Siten ryhdymme etsimään mittaa, joka toteuttaa loput ehdot (2)–(4).

Tällaisen mitan määrittelemiseksi otamme ensiksi käyttöön *ulkomitan.* Ulkomitan tarkoituksena on antaa arvio joukon mitalle joukon peittävien avoimien välien pituuksien summan avulla. Avoin väli $]a, b[$ on joukko

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$. Ulkomitan määrittelemme kaikille reaalilukujen joukon osajoukoille A seuraavasti:

Määritelmä 1.1.1 *Olkoon A reaalilukujen $\mathbb{R}$ osajoukko. Joukon A Lebesguen ulkomitta $m^*(A)$ on*

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) \mid I_k\text{:t avoimia välejä siten, että } A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\},$$

missä $l(I_k)$ on välin I_k tavallinen geometrinen pituus.

Siis joukon A ulkomitta on suurin alaraja eikä minimi joukon A peittävien avoimien välien I_k pituuksien summasta. Näin ollen ei välttämättä ole olemassa avoimia välejä I_k siten, että $m^*(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k)$. Lisäksi on syytä huomata pari asiaa:

1. Koska kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}$ on voimassa

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[= \mathbb{R},$$

niin ulkomitta $m^*(A)$ on määritelty kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}$.

2. Joukon A ulkomitta on aina ei-negatiivinen ja se voi olla myös ääretön:

$$0 \leq m^*(A) \leq \infty.$$

Tämä luonnollisesti siitä syystä, että geometrinen pituus on aina positiivinen, ja että suoran ulkomitta on ääretön, mikä nähdään seuraavasta lauseesta.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$ siten, että $A \subset B$. Olkoot välit I_k lisäksi avoimia välejä $]a, b[$, jotka peittävät joukon B, eli
$$B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$
Koska A on joukon B osajoukko, niin nämä välit peittävät myös joukon A, eli
$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$
Siten välttämättä
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} l(I_k) \geq m^*(A).$$
Näin ollen joukon B osajoukon A ulkomitta on pienempi kuin joukon B ulkomitta:
$$m^*(A) \leq m^*(B),$$
aivan kuten hyvältä mitalta voisi odottaakin. Tätä ominaisuutta kutsutaan ulkomitan *monotonisesti kasvava.*

Seuraavaksi osoitamme, että ulkomitta on myös siinä mielessä hyvä, että välin ulkomitta on sama kuin välin pituus.

Lause 1.1.2 *Reaalilukuvälin ulkomitta on sama kuin kyseisen välin pituus.*

Todistus. Käsitellään ensiksi suljettuja rajoitettuja välejä. Olkoon
$$I = [a, b], \quad a < b$$
suljettu väli. Tällöin jokaista positiivista lukua ϵ kohti voimme valita avoimen välin $]a - \epsilon, b + \epsilon[$, joka peittää välin I. Koska ulkomitta on kyseisen välin peittävien avoimien välien pituuksien suurin alaraja, niin
$$m^*(I) \leq b - a + 2\epsilon \quad \text{kaikilla } \epsilon > 0.$$
Koska ϵ on mielivaltainen, niin saamme
$$m^*(I) \leq b - a.$$

Seuraavaksi osoitamme, että

$$m^*(I) \geq b - a.$$

Olkoot nyt joukot I_k avoimia siten, että ne peittävät välin I:

$$I \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Koska väli on suljettu ja myös rajoitettu (eli kompakti), niin voimme soveltaa Heine–Borelin lausetta (katso [8, Theorem 2.15]). Sen mukaan on olemassa äärellinen osapeite I_{k_i}, $i = 1, \dots, m$, siten, että

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{k_i}.$$

Koska piste a kuuluu välille I, niin on olemassa jokin osapeitteen joukko I_{k_i} johon a sisältyy, eli

$$a \in I_{k_i} \quad \text{jollakin } i.$$

Merkitsemme tätä väliä

$$I_{k_i} = \left]a_1, b_1\right[.$$

Jos nyt $b_1 < b$, niin on puolestaan olemassa väli I_{k_j} siten, että

$$b_1 \in I_{k_j} \quad \text{jollakin } j.$$

Merkitsemme tätä väliä puolestaan

$$I_{k_j} =]a_2, b_2[.$$

Jatkamme tätä niin kauan, kunnes jollakin arvolla l pätee $b_l > b$. Näin olemme saaneet välit

$$\left]a_1, b_1\right[,\ \left]a_2, b_2\right[, \dots, \left]a_l, b_l\right[,$$

joille on konstruktion nojalla voimassa

$$b_k \in \left]a_{k+1}, b_{k+1}\right[$$

eli

$$a_{k+1} < b_k < b_{k+1}.$$

Näin ollen saamme

$$\begin{aligned}\sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_r) &\geq \sum_{i=1}^{m} l\left(I_{k_i}\right) \\ &\geq b_l - a_l + ... + b_1 - a_1 \\ &= b_l + (b_{l-1} - a_l) + ... + (b_1 - a_2) - a_1.\end{aligned}$$

Koska $b_{k-1} > a_k$ kaikille k, niin jokainen suluissa oleva termi on ei-negatiivinen. Siten

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_r) \geq b_l - a_1.$$

Toisaalta $b_l > b$ ja $a_1 < a$, joten

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_r) \geq b - a = l\left([a, b]\right).$$

Siis saamme

$$m^*\left(I\right) \geq l\left([a, b]\right) = b - a.$$

Koska lisäksi aiemmin totesimme, että

$$m^*\left(I\right) \leq b - a,$$

niin välttämättä pätee

$$m^*\left(I\right) = b - a.$$

Näin olemme todistaneet väitteen suljetuille rajoitetuille väleille.

Oletamme seuraavaksi, että väli I on rajoitettu, mutta ei suljettu. Tällöin voimme muodostaa suljetun välin $[a, b]$, missä $a = \inf I$ ja $b = \sup I$, jolloin

$$I \subset [a, b].$$

Koska I on välin $[a, b]$ osajoukko, niin silloin sen ulkomitta on korkeintaan sama kuin välin $[a, b]$ ulkomitta. Siis

$$m^*(I) \leq b - a = m^*\left([a, b]\right).$$

Toisaalta, jos valitsemme positiivisen luvun ϵ siten, että

$$\epsilon < \frac{b - a}{2},$$

niin

$$[a+\epsilon, b-\epsilon] \subset I.$$

Näin ollen saamme

$$m^*(I) \geq m^*\left([a+\epsilon, b-\epsilon]\right) = b-a-2\epsilon$$

jokaisella edellä määritellyllä luvulla ϵ. Siten pätee

$$m^*(I) \geq b-a.$$

Näin ollen saamme

$$m^*(I) = b-a,$$

joka puolestaan on sama kuin kyseisen ei-suljetun välin pituus, sillä $a = \inf I$ ja $b = \sup I$.

Jos väli I ei ole rajoitettu, niin ehdosta $a \in I$ seuraa, että $a+n \in I$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ tai $a-n \in I$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen saamme

$$m^*(I) \geq m^*\left([a, a+n]\right) = n$$

tai

$$m^*(I) \geq m^*\left([a-n, a]\right) = n$$

jokaiselle n. Siis $\mathrm{m}^*(I) = \infty$. $\square$

Ulkomitta ei ole additiivinen, mutta se toteuttaa lievemmän ominaisuuden:

Lause 1.1.3 *Olkoot A_i, $i \in \mathbb{N}$, reaalilukujoukon osajoukkoja. Tällöin näille joukoille pätee ulkomitan subadditiivisuus :*

$$m^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} m^*(A_i).$$

Todistus. Mikäli

$$m^*(A_i) = \infty$$

jollakin arvolla $i \in \mathbb{N}$, niin väite on voimassa triviaalisti.

Oletamme siis, että

$$m^*(A_i) < \infty \quad \text{kaikilla } i \in \mathbf{N}.$$

Tällöin on olemassa avoimet välit I_{i_k}, jotka toteuttavat ehdot

$$A_i \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{i_k}$$

ja kaikille $\epsilon > 0$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} l(I_{i_k}) < m^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Kun nyt otamme summauksen yli kaikkien indeksien i, niin saamme

$$\sum_{i,k \in \mathbb{N}} l(I_{i_k}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(A_i) + \epsilon.$$

Koska

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i,k \in \mathbb{N}} I_{i_k},$$

niin pätee

$$m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i,k} l(I_{i_k}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(A_i) + \epsilon.$$

Koska ϵ on kuitenkin valittu mielivaltaiseksi, niin välttämättä

$$m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(A_i),$$

eli ulkomitta on subadditiivinen. $\square$

Tällä tuloksella on kaksi hyvin ilmeistä seurausta.

Seuraus 1.1.4 *Jos joukko $A \subset \mathbb{R}$ on numeroituva, niin sen ulkomitta on nolla:*

$$m^*(A) = 0.$$

Todistus. Mikäli $A \subset \mathbb{R}$ on numeroituva, niin voimme esittää sen muodossa

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}.$$

Jokaisen pisteen x_i voimme peittää suljetulla joukolla $[x_i - \frac{\epsilon}{2}, x_i + \frac{\epsilon}{2}]$, missä $\epsilon \geq 0$ on mielivaltainen. Tällöin

$$0 \leq m^* \left(\{x_i\}\right) \leq m^* \left([x_i - \frac{\epsilon}{2}, x_i + \frac{\epsilon}{2}]\right) = \epsilon.$$

Koska ϵ oli mielivaltainen, niin saamme

$$m^* \left(\{x_i\}\right) = 0.$$

Edellisen lauseen nojalla saamme siten

$$0 \leq m^*(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m^* \left(\{x_i\}\right) = 0.$$

Siis numeroituvan joukon ulkomitta on nolla. $\square$

Seuraus 1.1.5 *Reaalilukuväli on ylinumeroituva.*

Todistus. Mikäli välin pituus on nollasta poikkeava (emme käsitä yhtä pistettä väliksi), niin myös ulkomitta on $\neq 0$, joten edellisen seurauksen nojalla väli on ylinumeroituva. $\square$

Tämän jälkeen voimmekin sitten määritellä itse mitan edellä olleen ulkomitan avulla.

1.2 Lebesguen mitta reaalilukujen joukossa

Reaalilukujen mitan määritelyssä vaikeutena on, ettei sitä voida määritellä täydellisesti additiivisena joukkofunktiona jokaiselle reaalilukujen joukon osajoukolle. Seuraavassa määritelmässä esitetään sellaiset joukot, joita voimme hyvin mitata. Määritelmä tosin näyttänee hiukan omituiselta, mutta sen tarkoituksellisuus selvinnee jatkossa.

Määritelmä 1.2.1 *Joukko $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, jos jokaiselle joukolle $A \subset \mathbb{R}$ on voimassa*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Mitallisten joukkojen joukkoa merkitään $\mathcal{M}$. Mitta m on mitallisten joukkojen joukolta $\mathcal{M}$ ei-negatiivisten laajennettujen reaalilukujen joukolle $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ määritelty funktio, jolle pätee

$$m(E) = m^*(E)$$

jokaiselle $E \in \mathcal{M}$.

Huomautamme vielä, että mitta on määritelty vain mitallisille joukoille. Jos joukko ei ole mitallinen, niin emme voi puhua sen "mitasta". Toisaalta määritelmä on järkevä, sillä ulkomitan määrittelimme kaikille joukoille. Myös ei-mitallisia joukkoja on olemassa (Katso Royden luku 3.4). Niiden esitys vaatii kuitenkin valinta-aksiomaa.

Koska kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}$ on voimassa Lauseen 1.1.3 nojalla ulkomitan subadditiivisuus, niin

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Siis, jos haluamme osoittaa jonkin joukon $E \subset \mathbb{R}$ mitalliseksi, riittää osoittaa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \tag{1.1}$$

kaikille niille joukoille A, joille $m^*(A) < \infty$. Mikäli $m^*(A) = \infty$, niin tämä epäyhtälö on voimassa selvästi.

Määritelmän perusteella saamme seuraavan triviaalin lauseen.

Lause 1.2.2 *Jos joukko $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, niin myös sen komplementti $\mathbb{R} \setminus E$ on mitallinen.*

Todistus. Vaihdamme vain joukot komplementeiksi, josta väite seuraa joukko-oppia käyttämällä. $\square$

Edelleen saamme, että jokainen joukko, jonka ulkomitta on nolla, on mitallinen.

Lause 1.2.3 *Olkoon $E \subset \mathbb{R}$. Jos $m^*(E) = 0$, niin joukko E on mitallinen ja $m(E) = 0$.*

Todistus. Koska $A \cap (\mathbb{R} \setminus E) \subset A$, niin

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E)).$$

Toisaalta, koska $m^*(E) = 0$, niin

$$0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(E) = 0.$$

Koska lisäksi $A \cap (\mathbb{R} \setminus E) = A \setminus E$, niin nämä tulokset yhdistämällä saamme

$$m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E).$$

Näin ollen E on mitallinen. □

Tällä tuloksella on edellisen luvun perusteella suora seuraus:

Seuraus 1.2.4 *Numeroituvat joukot ovat mitallisia ja niiden mitta on nolla.*

Todistus. Numeroituvan joukon ulkomitta on nolla Seurauksen 1.1.4 mukaan, joten väite seuraa edellisestä lauseesta. □

Mitta on luonnollinen, jos välit ovat mitallisia. Tämän todistamiseksi selvitämme ensin avoimen välin $]a, \infty[$ mitallisuuden.

Lemma 1.2.5 *Väli* $]a, \infty[$ *on mitallinen.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen testijoukko. Merkitsemme

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cap \,]a, \infty[\,, \\ A_2 &= A \setminus \,]a, \infty[\, = A \cap \,]-\infty, a]\,. \end{aligned}$$

Meidän pitäisi mitallisuuden määritelmän mukaan osoittaa, että

$$m^*(A) = m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

Ulkomitan subadditiivisuuden nojalla riittää osoittaa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

Koska tämä epäyhtälö on voimassa, kun $m^*(A) = \infty$, niin voimme olettaa, että $m^*(A) < \infty$.

Koska joukot A_1 ja A_2 ovat joukon A osajoukkoja, niin myös näiden ulkomitat ovat äärellisiä. Tällöin on olemassa sellaiset avoimet välit I_k, $n \in \mathbb{N}$, että

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

ja

$$\epsilon + m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k),\ \epsilon > 0.$$

Merkitsemme seuraavaksi

$$\begin{aligned} I_k' &= I_k \cap \,]a, \infty[\,, \\ I_k'' &= I_k \cap \,]-\infty, a] \end{aligned}$$

Koska välin ulkomitta on sama kuin välin pituus, niin voimme kirjoittaa

$$l(I_k) = l(I_k') + l(I_k'') = m^*(I_k') + m^*(I_k'').$$

Näin ollen voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \epsilon + m^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k') + m^*(I_k'') \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k') + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k'') \\ &\geq m^*(A_1) + m^*(A_2), \end{aligned}$$

missä viimeinen rivi tulee ulkomitan subadditiivisuuden perusteella. Koska ϵ on mielivaltainen, niin

$$m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2),$$

joten väite on voimassa. $\square$

Seuraavaksi osoitamme, että mitallisten joukkojen äärelliset yhdisteet ja leikkaukset ovat mitallisia. Tästä seuraa myös, että kaikki välit ovat mitallisia.

Lause 1.2.6 *Jos reaalilukujen joukon osajoukot $E_1, \ldots, E_k$ ovat mitallisia, niin joukot*

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i \qquad \textit{ja} \qquad \bigcap_{i=1}^{k} E_i$$

ovat mitallisia.

Todistus. Osoitamme väitteet tosiksi kahdelle joukolle. Yleiset tapaukset seuraavat näistä suoraan induktiolla.

Olkoot siis joukot E_1 ja E_2 mitallisia. Koska E_1 on mitallinen, niin määritelmän mukaan

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \setminus E_1)$$

jokaiselle joukolle $A \subset \mathbb{R}$. Sovellamme nyt joukon E_2 mitallisuutta joukkoon $A \setminus E_1$. Tällöin siis määritelmän mukaan

$$m^*(A \setminus E_1) = m^*\left((A \setminus E_1) \cap E_2\right) + m^*\left((A \setminus E_1) \setminus E_2\right).$$

Yhdistämällä nämä kaksi tulosta voimme kirjoittaa

$$\begin{array}{rcl} m^*(A) & = & m^*\left(A \cap E_1\right) + m^*\left((A \backslash E_1) \cap E_2\right) + m^*\left(A \backslash E_1 \backslash E_2\right) \\ & \geq & m^*\left(((A \backslash E_1) \cap E_2) \bigcup (A \cap E_1)\right) + m^*\left(A \backslash \left(E_1 \bigcup E_2\right)\right) \\ & = & m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + m^*\left(A \backslash \left(E_1 \cup E_2\right)\right). \end{array}$$

Näin ollen epäyhtälön (1.1) mukaan joukko $E_1 \cup E_2$ on mitallinen.

Toisaalta joukkojen E_1 ja E_2 leikkauksen voimme kirjoittaa muotoon

$$E_1 \cap E_2 = \mathbb{R} \setminus \left((\mathbb{R} \setminus E_1) \bigcup (\mathbb{R} \setminus E_2)\right).$$

Kun sovellamme tähän komplementin mitallisuutta ja edellä todistettua yhdisteen mitallisuutta, niin näemme, että myös leikkaus $E_1 \cap E_2$ on mitallinen. Nämä tulokset voimme yleistää induktiolla koskemaan mitallisia joukkoja $E_1, \ldots, E_n$. $\square$

Seuraus 1.2.7 *Kaikki reaalilukuvälit ovat mitallisia.*

Todistus. Koska joukko $]a, \infty[$ on mitallinen, niin myös sen komplementti $\mathbb{R} \setminus]a, \infty[=]-\infty, a]$ on mitallinen. Jos $a < b$, niin

$$]a, b] =]-\infty, b] \cap]a, \infty[$$

on mitallinen. Edelleen yhden pisteen joukot ovat nollamittaisina mitallisia, joten joukot

$$\begin{array}{rcl}]a, b] \cup \{a\} & = & [a, b] \\ ]a, b] \setminus \{b\} & = &]a, b[\\ ]-\infty, a] \backslash \{a\} & = &]-\infty, a[\\ ]a, \infty[\cup \{a\} & = & [a, \infty[\end{array}$$

ovat mitallisia. $\square$

Seuraavaksi todistamme kaksi lemmaa, joita tulemme tarvitsemaan numeroituvien unionien mitallisuuden todistamisessa.

Lemma 1.2.8 *Olkoot $E_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, keskenään pistevieraita ja mitallisia joukkoja ja $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen joukko. Tällöin on voimassa*

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} m^*\left(A \cap E_i\right).$$

Todistus. Jälleen todistamme tämän vain tapauksessa $k = 2$, sillä yleisen tapauksen saamme tästä induktiolla.

Olkoot siis E_1 ja E_2 mitallisia pistevieraita joukkoja. Koska E_1 on mitallinen, niin

$$m^*\left(A \cap \left(E_1 \cup E_2\right)\right) = m^*\left(A \cap \left(E_1 \cup E_2\right) \cap E_1\right) + m^*\left(\left(A \cap \left(E_1 \cup E_2\right)\right) \setminus E_1\right).$$

Käyttämällä joukko-oppia ja muistamalla, että $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, saamme

$$m^*\left(A \cap \left(E_1 \cup E_2\right)\right) = m^*\left(A \cap E_1\right) + m^*\left(A \cap E_2\right),$$

ja yleinen tapaus seuraa siis tästä induktiolla. $\square$

Lemma 1.2.9 *Jos joukot $E_i \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia, niin on olemassa pistevieraat mitalliset joukot $F_i \subset \mathbb{R}$ siten, että*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i.$$

Todistus. Valitsemme joukot F_i seuraavasti:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1 \\ F_2 &= E_2 \setminus E_1 \\ F_3 &= E_3 \setminus \left(E_1 \cup E_2\right) \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Tällöin yleinen joukko F_k on

$$F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right).$$

Joukot F_k ovat mitallisia ja pistevieraita, sillä kun $k > l$, niin

$$F_k \cap F_l = \left(E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)\right) \cap \left(E_l \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{l-1} E_i\right)\right) = \emptyset.$$